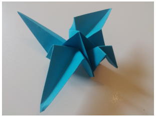
Die Servietten-Vermutung

Clara Löh

Universität Regensburg

10|10|16



Die Servietten-Vermutung

Servietten-Vermutung

Es ist nicht möglich, ein quadratisches Blatt Papier (Serviette!) so zu falten,

- dass eine ebene Figur entsteht,
- deren Umfang größer ist als das ursprüngliche Quadrat.

Geschichte der Servietten-Vermutung

- Formulierung des Problems durch Margulis: $\sim$ 1996 (?)

Geschichte der Servietten-Vermutung

- Formulierung des Problems durch Margulis: $\sim$ 1996 (?)
- Formulierung des Problems durch Arnol'd: $\sim$ 1956

Geschichte der Servietten-Vermutung

- Formulierung des Problems durch Margulis: ~ 1996 (?)
- Formulierung des Problems durch Arnol'd: ~ 1956
- Lösung des Problems durch Lang: < 1990 (!)
  (basierend auf Techniken, die lange davor bekannt waren)

Geschichte der Servietten-Vermutung

- Formulierung des Problems durch Margulis: $\sim$ 1996 (?)
- Formulierung des Problems durch Arnol'd: $\sim$ 1956
- Lösung des Problems durch Lang: $<$ 1990 (!)
  (basierend auf Techniken, die lange davor bekannt waren)
- einfache Lösung des Problems durch Tarasov: 2004

Einfaches Origami

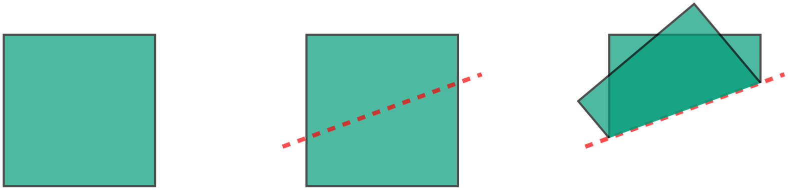
Definition (einfaches Origami)

- Einfaches Origami besteht aus einer Aneinanderreihung von einfachen Origamischritten, ausgehend von einer ebenen Figur.

Einfaches Origami

Definition (einfaches Origami)

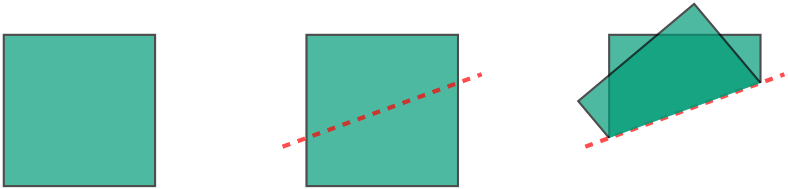
- Einfaches Origami besteht aus einer Aneinanderreihung von einfachen Origamischritten, ausgehend von einer ebenen Figur.
- Ein einfacher Origamischritt faltet eine ebene Figur entlang einer Geraden (so dass wieder eine ebene Figur entsteht).



Einfaches Origami

Definition (einfaches Origami)

- Einfaches Origami besteht aus einer Aneinanderreihung von einfachen Origamischritten, ausgehend von einer ebenen Figur.
- Ein einfacher Origamischritt faltet eine ebene Figur entlang einer Geraden (so dass wieder eine ebene Figur entsteht).
- Es muss immer die gesamte Figur entlang der Geraden gefaltet werden; das Falten einzelner Schichten ist nicht erlaubt!



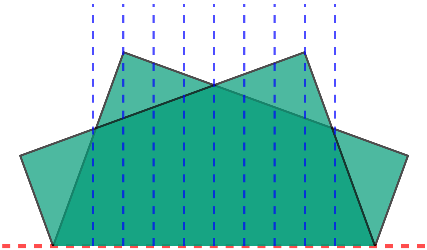
Einfaches Origami und Serviettenumfang

Satz (einfaches Origami vergrößert den Serviettenumfang nicht)

Wendet man einfaches Origami auf ein Quadrat an, so ist der Umfang der entstehenden Figuren nie größer als der Umfang des Ausgangsquadrats.

Einfaches Origami und Serviettenumfang, Beweis

Beweisskizze (Yaschenko).

- 
- Orthogonale Projektion und die Dreiecksungleichung zeigen: Der neue Umfang ist nicht größer als der alte. □

Einfaches Origami?!

Aber ...

Im Normalfall sind bei Origami viel allgemeinere Faltschritte erlaubt als in der obigen Version von einfachem Origami.

Einfaches Origami?!

Aber ...

Im Normalfall sind bei Origami viel allgemeinere Faltschritte erlaubt als in der obigen Version von einfachem Origami.

Frage

- Ist es mit allgemeinerem Origami möglich, den Servietten-Umfang zu vergrößern?

Einfaches Origami?!

Aber . . .

Im Normalfall sind bei Origami viel allgemeinere Faltschritte erlaubt als in der obigen Version von einfachem Origami.

Frage

- Ist es mit allgemeinerem Origami möglich, den Servietten-Umfang zu vergrößern?
- Kann man den Servietten-Umfang dann sogar beliebig vergrößern?

Zwischenüberlegung: Durchmesser

Beobachtung

- Bei jeder vernünftigen Formalisierung von Origami können Punkte durch das Falten nicht weiter voneinander entfernt werden.

Zwischenüberlegung: Durchmesser

Beobachtung

- Bei jeder vernünftigen Formalisierung von Origami können Punkte durch das Falten nicht weiter voneinander entfernt werden.
- Also: Der Durchmesser einer durch Origami resultierenden Figur kann höchstens so groß sein wie der Durchmesser der Ausgangsfigur (im Servietten-Problem: des Ausgangsquadrats).

Zwischenüberlegung: langer Umfang

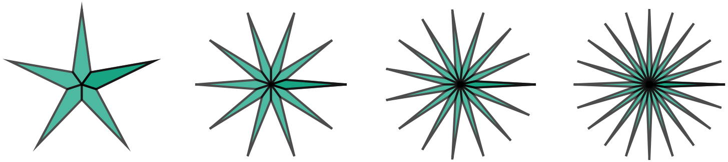
Folgerung

Möchte man den Servietten-Umfang mit Origami beliebig vergrößern, muss man also zunächst Figuren von beschränktem Durchmesser und beliebig großem Umfang finden.

Zwischenüberlegung: langer Umfang

Folgerung

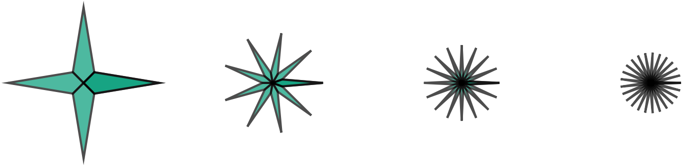
Möchte man den Servietten-Umfang mit Origami beliebig vergrößern, muss man also zunächst Figuren von beschränktem Durchmesser und beliebig großem Umfang finden.



...

Langer Umfang, sparsamer

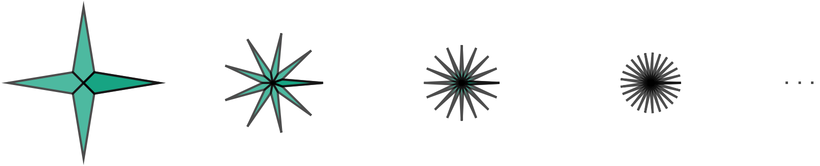
Es geht auch sparsamer:



. . .

Langer Umfang, sparsamer

Es geht auch sparsamer:

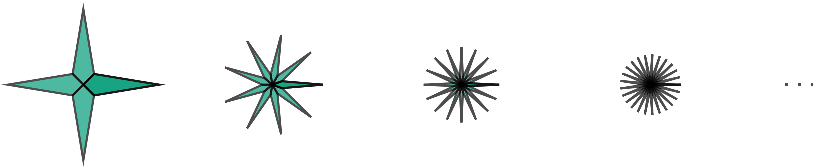


- Nämlich: Jeweils

$$n^2 \text{ Zacken der Länge } \frac{1}{2 \cdot n}$$

Langer Umfang, sparsamer

Es geht auch sparsamer:



- Nämlich: Jeweils

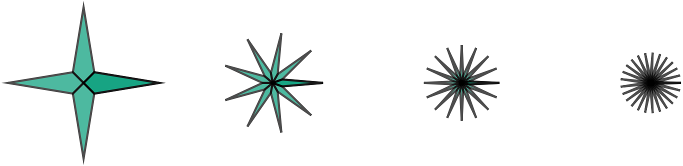
$$n^2 \text{ Zacken der Länge } \frac{1}{2 \cdot n}$$

- Dies ergibt eine Gesamtlänge von

$$n^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot n} = n.$$

Langer Umfang, sparsamer

Es geht auch sparsamer:



. . .

- Nämlich: Jeweils

$$n^2 \text{ Zacken der Länge } \frac{1}{2 \cdot n}$$

- Dies ergibt eine Gesamtlänge von

$$n^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot n} = n.$$

Genau dieses Verfahren werden wir im folgenden verwenden!

Theoretisches Origami

Definition (theoretisches Origami)

Theoretisches Origami sind Abbildungen f von einem Quadrat Q nach $\mathbb{R}^2$ mit folgender Eigenschaft:

Theoretisches Origami

Definition (theoretisches Origami)

Theoretisches Origami sind Abbildungen f von einem Quadrat Q nach $\mathbb{R}^2$ mit folgender Eigenschaft:

- Es gibt eine Triangulierung von Q, so dass f auf jedem Dreieck dieser Triangulierung eine Isometrie ist.

$\rightarrow$

Theoretisches Origami

Definition (theoretisches Origami)

Theoretisches Origami sind Abbildungen f von einem Quadrat Q nach $\mathbb{R}^2$ mit folgender Eigenschaft:

- Es gibt eine Triangulierung von Q, so dass f auf jedem Dreieck dieser Triangulierung eine Isometrie ist.

Dabei wird keine konkrete Faltanleitung gegeben;
es wird noch nicht einmal spezifiziert in welcher Reihenfolge die Schichten übereinanderliegen!

Theoretisches Origami und Serviettenumfang

Satz (theoretisches Origami vergrößert den Serviettenumfang)

Sei $L > 0$. Man kann mit theoretischem Origami aus einem Quadrat ebene Figuren erhalten, deren Umfang größer als L ist.

Theoretisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

Beweisskizze (Pak).

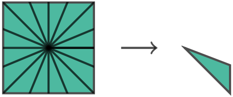
Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

Theoretisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

Beweisskizze (Pak).

Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Basismodul/Büchlein mit k Segmenten:

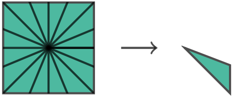


Theoretisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

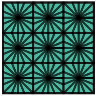
Beweisskizze (Pak).

Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Basismodul/Büchlein mit k Segmenten:



- Unterteilung des Quadrats in n^2 Quadrate:

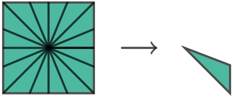


Theoretisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

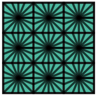
Beweisskizze (Pak).

Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Basismodul/Büchlein mit k Segmenten:



- Unterteilung des Quadrats in n^2 Quadrate:



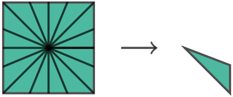
- Zusammenlegen der n^2 Büchlein: 

Theoretisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

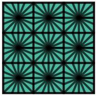
Beweisskizze (Pak).

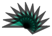
Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Basismodul/Büchlein mit k Segmenten:



- Unterteilung des Quadrats in n^2 Quadrate:



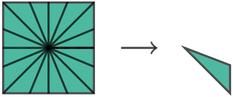
- Zusammenlegen der n^2 Büchlein: 
- Auseinanderfächern der Seiten der Büchlein: 

Theoretisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

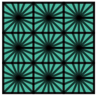
Beweisskizze (Pak).

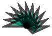
Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Basismodul/Büchlein mit k Segmenten:



- Unterteilung des Quadrats in n^2 Quadrate:



- Zusammenlegen der n^2 Büchlein: 
- Auseinanderfächern der Seiten der Büchlein: 
- Umfang: Für $n, k \to \infty$ wird der Umfang beliebig groß. $\square$

Theoretisches Origami?!

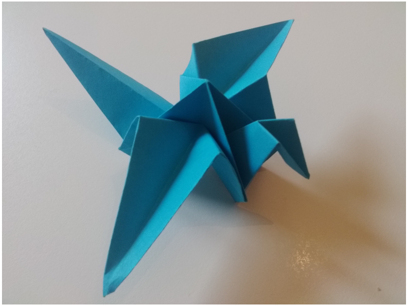
Aber ...

Es ist nicht klar, dass alle Schritte des theoretischen Origamis praktisch umsetzbar sind, da theoretisches Origami die Anordnung der Blattschichten nicht berücksichtigt.

Praktisches Origami

Definition (praktisches Origami)

Erlaubt sind alle Schritte, die im klassischen Origami erlaubt sind, inklusive Einsinken etc.



Praktisches Origami und Serviettenumfang

Satz (praktisches Origami vergrößert den Serviettenumfang)

Sei $L > 0$. Man kann mit praktischem Origami aus einem Quadrat ebene Figuren erhalten, deren Umfang größer als L ist.

Praktisches Origami, erste Schritte

Satz (praktisches Origami vergrößert den Serviettenumfang ein bisschen)

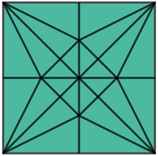
Man kann mit praktischem Origami aus einem Einheitsquadrat ebene Figuren erhalten, deren Umfang größer als 4 ist.

Praktisches Origami, erste Schritte

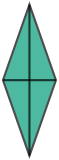
Satz (praktisches Origami vergrößert den Serviettenumfang ein bisschen)

Man kann mit praktischem Origami aus einem Einheitsquadrat ebene Figuren erhalten, deren Umfang größer als 4 ist.

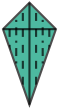
Beweisskizze (Lang).



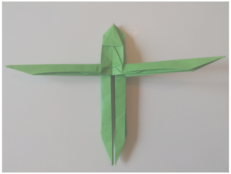
Quadrat



Vogelbasis



Doppelt einsinken



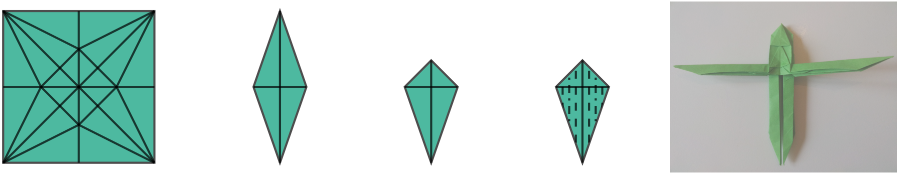
Um-/ Ausklappen

Praktisches Origami, erste Schritte

Satz (praktisches Origami vergrößert den Serviettenumfang ein bisschen)

Man kann mit praktischem Origami aus einem Einheitsquadrat ebene Figuren erhalten, deren Umfang größer als 4 ist.

Beweisskizze (Lang).



Quadrat — Vogelbasis — Doppelt einsinken — Um-/Ausklappen

Umfang: ungefähr $4.120 > 4$. $\square$

Praktisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

Beweisskizze (Lang).

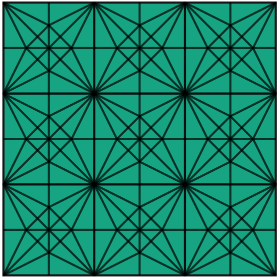
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Praktisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

Beweisskizze (Lang).

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Kombiniere $(n-1)^2$ Vogelbasen:



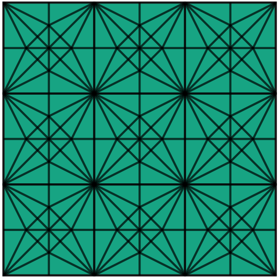
Dies liefert eine Basis mit n^2 „lange“ Spitzen.

Praktisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

Beweisskizze (Lang).

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Kombiniere $(n-1)^2$ Vogelbasen:



  Dies liefert eine Basis mit n^2 „lange“ Spitzen.

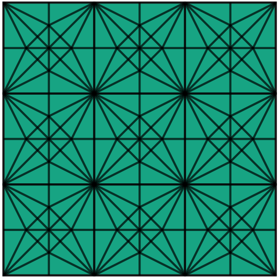
- Ausdünnen der Spitzen durch häufiges Einsinken.

Praktisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

Beweisskizze (Lang).

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Kombiniere $(n-1)^2$ Vogelbasen:



  Dies liefert eine Basis mit n^2 „lange" Spitzen.
- Ausdünnen der Spitzen durch häufiges Einsinken.
- Umfang: ungefähr $\frac{n^2}{n-1}$. $\square$

Praktisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

Beweisskizze (Tarasov).

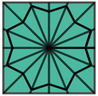
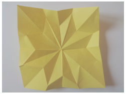
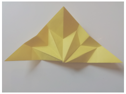
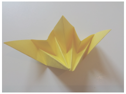
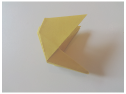
Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

Praktisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

Beweisskizze (Tarasov).

Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Basismodul mit k Segmenten:

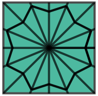
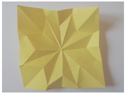
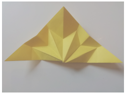
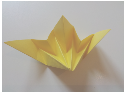
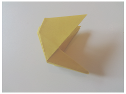
 $\longrightarrow$    

Praktisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

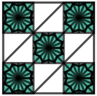
Beweisskizze (Tarasov).

Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Basismodul mit k Segmenten:

 $\longrightarrow$    

- Unterteilung des Quadrats in n^2 Quadrate,
  Färbung im Schachbrettmuster

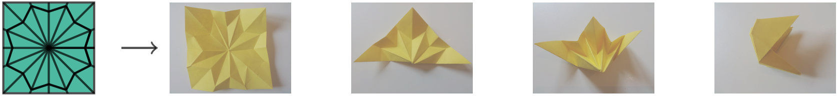


Praktisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

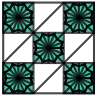
Beweisskizze (Tarasov).

Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Basismodul mit k Segmenten:



- Unterteilung des Quadrats in n^2 Quadrate,
  Färbung im Schachbrettmuster



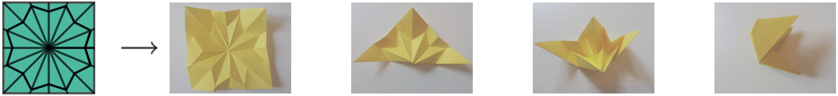
- Zusammenfalten: zunächst als Girlande, dann als Dreieck

Praktisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

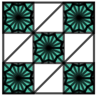
Beweisskizze (Tarasov).

Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Basismodul mit k Segmenten:



- Unterteilung des Quadrats in n^2 Quadrate,
  Färbung im Schachbrettmuster



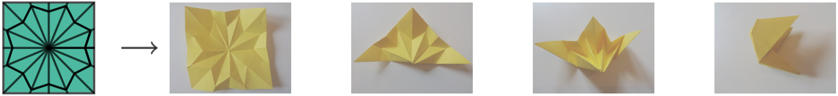
- Zusammenfalten: zunächst als Girlande, dann als Dreieck
- Basismodule ausklappen, zu einem Kamm.

Praktisches Origami und Serviettenumfang, Beweis

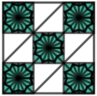
Beweisskizze (Tarasov).

Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Basismodul mit k Segmenten:



- Unterteilung des Quadrats in n^2 Quadrate,
  Färbung im Schachbrettmuster



- Zusammenfalten: zunächst als Girlande, dann als Dreieck
- Basismodule ausklappen, zu einem Kamm.
- Umfang: Für $n, k \to \infty$ wird der Umfang beliebig groß. □

Praktisches Origami?!

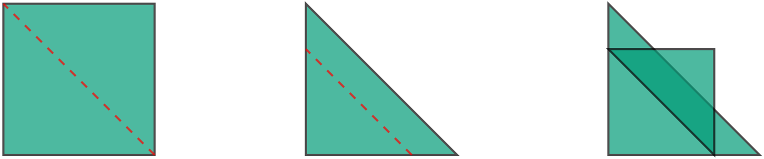
Aber ...

Kann man nicht vielleicht doch auch mit einfacheren Faltschritten den Serviettenumfang beliebig vergrößern?

Praktisches Origami?!

Aber ...

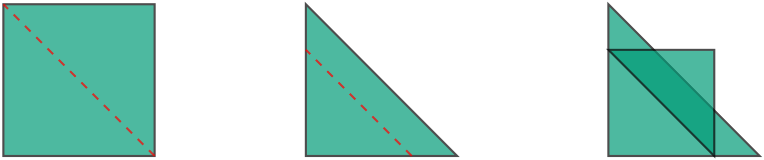
Kann man nicht vielleicht doch auch mit einfacheren Faltschritten den Serviettenumfang beliebig vergrößern?



Praktisches Origami?!

Aber …

Kann man nicht vielleicht doch auch mit einfacheren Faltschritten den Serviettenumfang beliebig vergrößern?



Dies ist ein offenes Problem!

Literatur

- J. Montroll, R.J. Lang. Origami Sea Life,
  Dover Publications, 1990.
- R.J. Lang. Origami Design Secrets,
  A K Peters, 2003.
- I. Pak. Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry,
  http://www.math.ucla.edu/∼pak/book.htm
- A.S. Tarasov. Solution of Arnold's "folded ruble" problem,
  Chebyshevski Sb. 5, 1(9), 2004.
- I. Yaschenko. Make your Dollar bigger now!!!,
  Math Intelligencer, 20(2), 1998.
- The folded rouble,
  http://www.etudes.ru/en/etudes/rouble/