

# *Origamics*

Origami trifft auf Mathematik

## **Diplomarbeit**

zur Erlangung des akademischen Grades einer Magistra der  
Naturwissenschaften

an der Karl-Franzens-Universität Graz

vorgelegt von

**Sarah KUCHAR**

am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen der KFU Graz

Begutachterin: Ao.Univ.-Prof. Dr.phil Gertrud Desch

Graz, 2017

No modern schoolboy can appreciate the blessings which he enjoys in the way of notation till he has seen something of the difficulties with which his predecessors had to wrestle.

M. Barwell (1913).

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich während der gesamten Studienzeit und vor allem im letzten halben Jahr unterstützt und begleitet haben.

Ein großes Dankeschön gebührt Frau Ao.Univ.-Prof. Dr.phil Gertrud Desch, die sich bereit erklärt hat, das Diplomarbeitvorhaben zu betreuen. Dank ihr konnte ich mich mit einem mir am Herzen liegenden Thema beschäftigen, wissend sie jederzeit für konstruktive und wertvolle Hilfe aufsuchen zu können. Insbesondere möchte ich mich bei ihr für die mir überlassenen Freiräume in der Gestaltung dieser Arbeit und für ihre menschliche Art, Verbesserungsvorschläge auszudrücken, bedanken.

Fast ebenso viel Dank gebührt Mattias Dohr für seine Hilfsbereitschaft während des Schreibprozesses und für das kritische Korrekturlesen. Ohne ihn wären mir sehr viele Fehler verborgen geblieben.

Daneben gilt mein Dank auch all meinen Freundinnen und Freunden sowie Studienkollegen und Studienkolleginnen, die mir in dieser Zeit mein Leben verschönert haben. Hervorheben möchte ich hier Sabrina Lierzer, die in schwierigen Situationen immer mit mir umzugehen wusste und Isabella Mathwieser, mit der ich so manche lustige Hausübungsbeispiel-Diskussion geführt habe.

Bedanken möchte ich mich auch bei meiner Mitbewohnerin Mirjam Purkarthofer für den kreativen Adventkalender aus Origamifiguren und dafür, dass sie die herumliegenden Backpapierbögen und Skizzen geduldet hat.

Damit ihr Name nicht in Vergessenheit gerät, bedanke ich mich ebenfalls bei Conny Schatzer aus Bad Vöslau, die mich - wie eine große Schwester - in drei Wochen auf meine neue Existenz vorbereitet hat und mein Leben für immer prägen wird.

Ebenso bedeutsam und für mich existenziell ist meine tatsächliche Zwillingsschwester Alice. Auch wenn wir uns nicht immer gut verstehen, weiß ich, dass sie immer für mich da sein wird und dafür möchte ich ihr Danke sagen.

Mein größter Dank gilt jedoch meinen Eltern, Michèle Hervé und Gottfried Kuchar, die mir die Liebe zum Unterrichten mit in die Wiege gelegt haben. Ich bedanke mich bei ihnen für die Ermutigungen, für die moralische und finanzielle Unterstützung, sowie für die bedingungslose Hilfsbereitschaft, mit der sie mir stets zur Seite stehen. Sie haben mich gelehrt, sich den immer wiederkehrenden Herausforderungen des Lebens mit Offenheit und Dankbarkeit zu stellen und dabei die eigenen Ziele nie aus den Augen zu verlieren.

Maman, Papa, c'est à vous deux que je dédie ce travail, car sans vous je ne serais pas là où je suis maintenant.

## **Abstract**

While compass-and-straightedge geometric constructions are well established in geometry classes at school and university and its theory is popular and widely spread, the use of a folded sheet of paper as a geometric tool still remains quite unknown. Within the last 40 years, however, impossible Euclidean constructions have been created through paper folding, such as the trisection of an angle and the doubling of a cube. That is because Origami can solve cubic polynomials by folding a common tangent to two distinct parabolas. This feature is based on the sixth axiom of the seven HUZITA-HATORI-Axioms. The HUZITA-HATORI system has not been around for very long, since the axiomatization of origami only took place a few years ago. An algebraic analysis of this system of axioms shows that all standard compass-and-straightedge constructions of the Euclidean geometry can be done with elementary methods of origami. This paper will show how this can be achieved in practice. In addition, construction methods for solving linear, quadratic and cubic equations will be presented, as well as a method for the construction of proportions that are rational fractions.

## **Kurzfassung**

Während die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal einen festen Bestandteil der Schul- und Hochschulgeometrie ausmachen und die Theorie darüber weitreichend bekannt und gut studiert ist, bleibt die Verwendung von Papier als geometrisches Werkzeug weniger verbreitet. Dabei wurden in den letzten vierzig Jahren euklidisch unmögliche Konstruktionen durch bloßes Falten realisiert, wie beispielsweise die Winkeldreiteilung und die Würfelverdoppelung. Dies resultiert daraus, dass Origami kubische Probleme lösen kann, indem eine gemeinsame Tangente zweier verschiedener Parabeln bestimmt wird. Diese Eigenschaft ist im sechsten der sieben HUZITA-HATORI-Axiome verankert. Das HUZITA-HATORI -Axiomensystem besteht in seiner heutigen Form seit wenigen Jahren, da auch die Axiomatisierung des Origami erst vor wenigen Jahren stattgefunden hat. Eine algebraische Analyse dieses Axiomensystems zeigt auf, dass sich alle euklidischen Konstruktionen mit den Origamimethoden realisieren lassen. In dieser Arbeit wird demonstriert, wie diese auch praktisch zu imitieren sind. Außerdem werden Faltanleitungen zum Lösen linearer, quadratischer und kubischer Gleichungen, sowie zur Konstruktion von Verhältnissen erarbeitet.

## Inhaltsverzeichnis

Danksagung .....	iii
Abstract .....	iv
Kurzfassung .....	v
Inhaltsverzeichnis .....	vi
1 Einleitung .....	9
2 Was ist Origami .....	10
3 Geschichtliche Hintergründe .....	10
4 Euklidische Konstruktionen .....	11
4.1 Vorüberlegungen .....	11
4.2 Axiomensystem .....	12
5 Origami – Konstruktionen .....	14
5.1 Vorüberlegungen .....	14
5.2 Huzita-Hatoris Grundfaltungen .....	15
5.3 Genauere Beschreibung der Grundfaltungen .....	16
5.4 Ausführbarkeit der Grundfaltungen .....	23
5.5 Bemerkungen zu Huzita-Hatoris Axiomensystem .....	28
6 Vergleich Euklid – Origamics .....	30
6.1 Algebraische Analyse der euklidischen Operationen .....	30
6.2 Algebraische Analyse der Grundfaltungen .....	32
6.3 Euklid auf Origamics zurückführen .....	38
6.3.1 $E1$ auf Origamics zurückführen .....	38
6.3.2 $E2$ auf Origamics zurückführen .....	38
6.3.3 $E3$ auf Origamics zurückführen .....	39
6.3.4 $E4$ auf Origamics zurückführen .....	39
6.3.5 $E5$ auf Origami zurückführen .....	40
6.4 Origamics auf Euklid zurückführen .....	42
6.4.1 Identische Operationen .....	42
6.4.2 Die Grundfaltungen $H2$ , $H3$ und $H4$ .....	42
6.4.3 $H5$ und $H7$ auf Euklid zurückführen .....	42

7	Anwendungsmöglichkeiten von Origami .....	44
7.1	Geometrische Elementarkonstruktionen .....	44
7.2	Lösen linearer Gleichungen .....	46
7.3	Lösen allgemeiner quadratischer Gleichungen .....	47
7.3.1	Ein Beispiel .....	48
7.3.2	Falten der Quadratwurzel .....	49
7.3.3	Falten der Quadratwurzel unter Verwendung des Höhensatzes .....	50
7.4	Lösen allgemeiner kubischer Gleichungen .....	50
7.4.1	Ein Beispiel .....	52
7.4.2	Falten der Kubikwurzel .....	53
7.5	Charakterisierung der konstruierbaren Punkte .....	55
7.6	Die klassischen Probleme der Antike .....	56
7.6.1	Würfelverdoppelung .....	56
7.6.1.1	Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ nach Beloch .....	57
7.6.1.2	Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ nach Messer .....	60
7.6.2	Winkeldreiteilung .....	63
7.6.2.1	Winkeldreiteilung nach Abe .....	64
7.6.2.2	Winkeldreiteilung nach Justin .....	66
7.6.3	Quadratur des Kreises .....	68
7.7	Die Konstruktion regulärer Polygone .....	68
7.8	Strecken in gleich große Abschnitte unterteilen .....	69
7.8.1	Satz von Haga .....	69
7.8.2	Verallgemeinerung des Satz von Haga .....	72
8	Resümee und Ausblick .....	75
	Literaturverzeichnis .....	76
	Abbildungsverzeichnis .....	78
	Anhang .....	80

## 1 Einleitung

Sicher hat jeder von uns schon einmal aus einem selbstgefalteten Papiertrinkbecher getrunken oder zugesehen, wie sein Papierschiffchen von der Strömung des Wassers immer weiter getrieben geworden ist oder wunderschöne Figuren in den Händen gehalten, die allein durch Falten von Papier entstanden sind.

Dabei steckt hinter dieser jahrhundertealten Kunst des Papierfaltens, auch Origami genannt, viel mehr Mathematik, als wir es zunächst vermuten. So lassen sich enge Verbindungen zur Algebra, zur Zahlentheorie und zur Theorie der Berechnung finden.

Die älteste Art das Papierfalten mathematisch zu untersuchen ist die, mittels Falten geometrische Konstruktionen zu entwerfen. Die Idee ist einfach: man nimmt sich ein Blatt Papier und macht eine erste Faltkante. Dann entfaltet man das Papier wieder und macht eine zweite Faltkante. Dadurch entstehen erste Schnittpunkte. Jetzt kann man sich überlegen, wie man auf diese Art geometrische Figuren konstruieren oder wie man beispielsweise einen Winkel teilen kann. Dabei ist das einzige Werkzeug, das einem zur Verfügung steht, die Faltkante. „Damit kommt man bestimmt nicht weit“, denkt sich der Skeptiker, der bereits zu Zirkel und Lineal greifen will. Verglichen zu den euklidischen Werkzeugen, erscheint ihm sein Werkzeug einfach nicht mächtig genug.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir den Skeptiker eines Besseren belehren. Im ersten Teil der Arbeit (Kapitel 1 bis 6), wollen wir zunächst das euklidische Axiomensystem und dessen Charakteristik genauer analysieren. Danach werden wir auch für Origami die erlaubten Operationen definieren und dafür ein ähnliches Axiomensystem aufstellen, wobei wir jede einzelne Faltung auf deren Ausführbarkeit prüfen werden. Im Anschluss werden wir die beiden Axiomensysteme einander gegenüberstellen und Aussagen über die damit realisierbaren geometrischen Konstruktionen treffen. Außerdem werden wir versuchen (sofern möglich), die einzelnen Operationen mit dem jeweils anderen Werkzeug auszuführen, etwa einen Kreis nur mittels Faltung zu erzeugen.

Im zweiten Teil (Kapitel 7) werden wir uns an die praktische Umsetzung der gewonnenen Kenntnisse wagen und so unter anderem mittels Papierfalten lineare, quadratische und kubische Gleichungen lösen, sowie drei Aufgabenstellungen, die uns aus der Antike überliefert worden sind.

## 2 Was ist Origami

Der Begriff *Origami* umfasst die vielfältigen Aspekte des Papierfaltens. Neben dem bekannten *klassischen Origami*, bei dem aus einem quadratischen Blatt Papier kunstvolle Figuren gefaltet werden, wird unter anderem noch zwischen *Modularem Origami* (Falten von Objekten, die sich aus mehreren Komponenten zusammensetzen), *Rigid Origami* (Falten und Entfalten von Modellen ohne Verbiegen von Flächenstücken), *Zwei- oder Dreidimensionalem Origami*, *Origami-Parkettierung*, *Origami-Design* und *Origami als axiomatische Geometrie* unterschieden (vgl. [24]).

Etymologisch betrachtet hat der Begriff Origami seinen Ursprung im japanischem *ori* (falten) und *kami* (Papier). Um die starke Verbindung von Mathematik und Origami zu verdeutlichen, wurde die Bezeichnung *Origamics* eingeführt. Dieses Wort setzt sich aus *Origami* und *Mathematics* zusammen und wurde vom japanischen Biologen Haga Kazuo 1994 auf dem 2. internationalen Kongress für „Origami Science and Scientific Origami“ vorgeschlagen [16]. In der deutschsprachigen Literatur findet man auch den Begriff *Mathegami* bei dem die Mathematik in den Vordergrund rückt (vgl. [32]). Für diese Arbeit wollen wir die erste Variante verwenden.

## 3 Geschichtliche Hintergründe

Die Anfänge des Origami sind unklar. Gelegentlich wird behauptet, dass die Idee, Figuren aus Papier zu falten mit der Erfindung des Papiers und demnach in China, geboren wurde. Tatsächlich falteten die Menschen aber schon lange vorher Stoffe und andere Materialien. Auch ab wann man die Papierfaltung als ein geometrisches Werkzeug gebrauchte, ist schwer zu sagen. Alte japanische *Sangakus*<sup>1</sup>, auf denen geometrische Papierfaltprobleme abgebildet sind, deuten jedenfalls darauf hin, dass es in Japan eine mathematische, aber auch religiöse und künstlerische Tradition in Origami gegeben hatte [34].

Die erste bekannte mathematische Abhandlung über geometrische Konstruktionen mittels Papierfaltung erschien 1893. In seinem Buch *Geometric Exercises in Paper Folding* [30] behandelte T. Sundara Rows Probleme wie die Winkeldreiteilung oder die Konstruktion regelmäßiger Vielecke und Kegelschnitte. Felix Klein erwähnte dieses Werk in einem seiner Bücher, was sicherlich zu wachsendem Interesse am geometrischen Papierfalten beitrug. Allerdings beschäftigte sich Row in seinem Werk nicht mit der Frage nach den zulässigen Faltungen, sondern benutzte sehr vage Formulierungen. Außerdem unterschätzte er die Möglichkeiten der japanischen Papierfaltkunst, weshalb darin falsche Aussagen zu finden sind.

Rows Entdeckungen inspirierten in den darauffolgenden Jahren zahlreiche Mathematiker und Mathematikerinnen. Am Beginn des 20. Jahrhunderts entstanden mittels Papierfalten

---

<sup>1</sup> Tafeln aus den Jahren 1600-1890 mit mathematischen Problemen.

insbesondere elegante Methoden zum Lösen quadratischer Gleichungen. Der wohl bemerkenswerteste Beitrag dieser Zeit stellt der im Jahr 1936 veröffentlichte Artikel „Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici“ (über die Methode der Papierfaltung zur Lösung geometrischer Probleme) von Margharita Piazzola Beloch dar [7]. Er ist der Beweis dafür, dass sie als erste die wahre Stärke des Systems der Papierfaltung erkannte. Ihre Arbeit blieb jedoch lange Zeit unentdeckt.

Die eigentliche Mathematisierung des Origamis begann in etwa vierzig Jahre später, ab den 90er-Jahren. Wegweisend waren dabei Arbeiten von Thomas Hull, Robert J. Lang, Martin und Eric Demaine, Robert Geretschläger und vielen weiteren.

In etwa zur selben Zeit fing man an, sich intensiver mit der Origami-Axiomatik, um die es in dieser Arbeit geht, auseinander zu setzen. Im Zeitraum von 1989 bis 2001 wurden die auf diesem Gebiet wichtigsten Beiträge von Jacques Justin, Humiaki Huzita und Koshiro Hatori veröffentlicht [24].

## **4 Euklidische Konstruktionen**

Das Zeichnen von ebenen geometrischen Figuren faszinierte die Menschen schon sehr früh. Anfangs benutzten sie ein Stück Holz, um Linien zu zeichnen und mittels einer Schnur gelangen ihnen Kreise. Schließlich erfanden die Griechen Hilfsmittel, anhand derer sie besonders schöne Formen erhielten, nämlich das Lineal und den Zirkel. Dabei ist unter dem Lineal viel eher eine „Schiene“ zu verstehen, die keine Markierungen aufweist und daher nicht zum Messen verwendet werden kann (vgl. [17]). Sie bemerkten, dass man einige Formen mit diesen beiden Werkzeugen zeichnen kann, andere wiederum nicht.

Zur selben Zeit verfasste Euklid die *Elemente*, eines der einflussreichsten Bücher der Mathematikgeschichte. Das System, das er darin für die Geometrie aufbaute, beeinflusste auch viele andere Wissenschaftszweige. Euklid war nämlich der erste, dessen mathematischen Ausführungen auf Axiomen basierten. Seine Methode bestand darin, Theoreme herzuleiten, indem er strenge logische Regeln auf Axiome, Definitionen und Postulate anwendete.

Die gleiche Vorgehensweise führte zu ähnlich strengen Regeln für die Konstruktion von ebenen geometrischen Figuren mit Zirkel und Lineal.

### **4.1 Vorüberlegungen**

Bei der Betrachtung euklidischer Konstruktionen geht man davon aus, dass gewisse Punkte in einer unendlichen euklidischen Ebene gegeben sind. Im Gegensatz dazu, ist jede Zeichenfläche - sei es die Papierfläche oder die Fläche einer Tafel - endlich [11].

Außerdem haben Punkte im euklidischen Sinn zwar eine Position, aber keine Größe. Wir können sie deshalb eigentlich nicht wirklich zeichnen. Egal wie klein beispielsweise die Markierung mit einem Stift ausfallen würde, der Punkt hätte immer noch eine Größe.

Wie sieht es mit den vorgegebenen Werkzeugen aus? Mit dem Lineal lassen sich Linien zeichnen, sofern zwei Punkte gegeben sind. Für die Konstruktion eines Kreises mit dem Zirkel benötigt man einen Mittelpunkt und einen Abstand, der den Radius darstellt. Wir erkennen also: Erst ein „starting set“ [29] von zumindest zwei Punkten ermöglicht die Verwendung der euklidischen Werkzeuge und somit die Konstruktion weiterer Punkte.

## 4.2 Axiomensystem

Hinsichtlich der euklidischen Geometrie gelten für uns folgende Konstruktionsvorschriften (vgl. [17, S. 54]):

(E1) Seien zwei beliebige Punkte  $P$  und  $Q$  gegeben. Dann kann man mit dem Lineal die Verbindungsgerade  $l = PQ$  konstruieren, die beide Punkte enthält.

(E2) Seien ein Punkt  $M$  und die Länge der Strecke  $r > 0$  gegeben. Dann kann man den Kreis  $k = \{M; r\}$  mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  mit dem Zirkel zeichnen.

Insbesondere ist der Radius  $r$  als die Länge einer Strecke zwischen zwei Punkten  $P$  und  $Q$  gegeben, wobei einer der Punkte auch  $M$  sein kann und der andere dadurch am Kreis liegt.

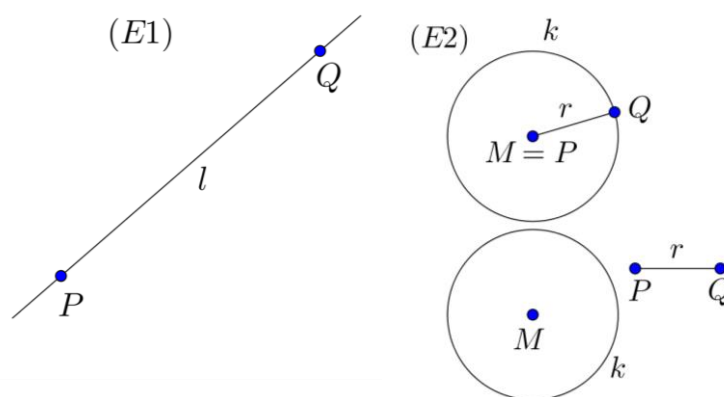


Abbildung 1: Euklidisches Axiom 1 und 2

Da wir Strecken und Kreise als eine Punktmenge auffassen, ist es nicht nötig, ein separates Verfahren zu formulieren (so wie es Euklid tat), mit dem wir eine gegebene Strecke zusammenhängend gerade verlängern können. Kennen wir nämlich eine Strecke, so kennen wir auch deren Endpunkte und können theoretisch mittels (E1) die gesamte unendliche Gerade konstruieren (vgl. [11]).

Die Anwendung von (E1) und (E2) führt zu Kreisen und Geraden. Schneiden sich diese, erhält man wieder neue Punkte.

Folgende Verfahren gelten daher ebenfalls als zulässig:

(E3) Seien zwei nicht-parallele Geraden  $l_1$  und  $l_2$  gegeben. Dann kann man deren Schnittpunkt  $P = l_1 \cap l_2$  ermitteln.

(E4) Sind ein Kreis  $k = \{M; r\}$  mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  und eine Gerade  $l$  derart gegeben, dass der Abstand von  $M$  und  $l$  nicht größer ist als  $r$ , so kann man die Schnittpunkte zwischen  $k$  und  $l$  ermitteln.

(E5) Seien zwei Kreise  $k_1 = \{M_1; r_1\}$  und  $k_2 = \{M_2; r_2\}$  derart gegeben, dass

- (i) keiner der Mittelpunkte innerhalb des jeweiligen anderen Kreises liegt und der Abstand zwischen den Mittelpunkten nicht größer ist als die Summe der beiden Radien.
- (ii) der Mittelpunkt eines der Kreise innerhalb des anderen liegt und der Abstand zwischen den zwei Mittelpunkten nicht kleiner ist als die Differenz zwischen den beiden Radien.

Dann kann man die Schnittpunkte der Kreise  $k_1$  und  $k_2$  ermitteln.

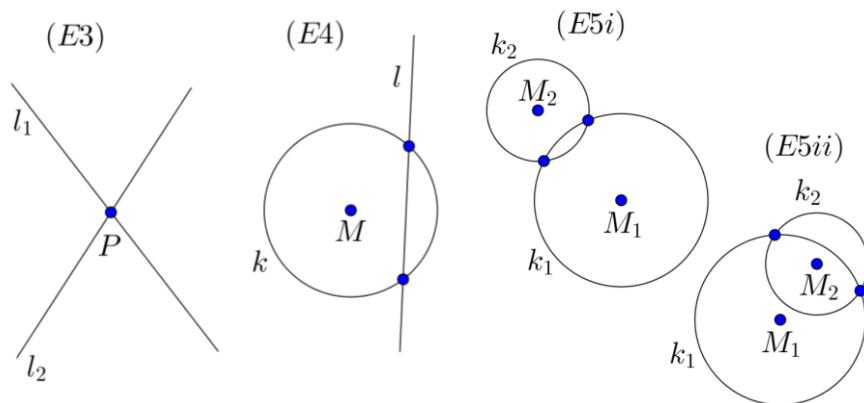


Abbildung 2: Euklidisches Axiom 3, 4 und 5

Eine wiederholte Anwendung der erlaubten Konstruktionsschritte (E1) bis (E5) auf anfangs gegebene Punkte, führt zu Geraden und Kreisen und in weiterer Folge zu neuen Punkten. Will man zeigen, dass ein geometrisches Problem mittels der euklidischen Methode lösbar ist, so sind - ausgehend von vorgegebenen Punkten - Punkte mit den gesuchten geometrischen Eigenschaften zu finden. Dabei sind die Verfahren (E1) bis (E5) die einzig erlaubten Konstruktionsschritte.

Hinter der Einfachheit dieser Regeln verbirgt sich eine Vielzahl an Möglichkeiten, deren Grenzen die Forschung der modernen Mathematik motivierte.

## 5 Origami – Konstruktionen

In der Geometrie sind Axiomensysteme von den vorgegebenen Mitteln motiviert. Wie wir gesehen haben, beschreibt Euklid in seinen Axiomen die Benutzung der, zu seiner Zeit zulässigen, Zeichenwerkzeuge. In Origamics ist das vorgegebene Werkzeug die Faltung. Will man den Papierfaltkonstruktionen ein Axiomensystem zu Grunde legen, so muss man sich auf gewisse Grundfaltungen einigen. Dieser Prozess hat in den 1970er-Jahren begonnen, als Mathematiker und Mathematikerinnen verschiedene Faltungsmöglichkeiten und deren Kombination betrachteten.

Der erste Mathematiker, der für die *Einfachfaltungen* (s. 5.1) ein Schema präsentierte, war der Japaner Humiaki Huzita. 1991 beschrieb er in sechs Grundfaltungen, wie gefaltete Linien entstehen. Zehn Jahre später ergänzte Koshiro Hatori diese sechs Grundfaltungen durch eine weitere. Es zeigte sich, dass Jacques Justin bereits 1989 in „opérations élémentaires de pliage“ [25] sieben ähnliche Axiome aufgezählt hatte.

Inzwischen sind viele weitere Vorschläge für ein Axiomensystem der Einfachfaltungen zu finden, die zum Teil stark voneinander abweichen. Auckly und Cleverland [6] präsentierten 1995 ein Axiomensystem bestehend aus nur fünf Grundfaltungen, während George Martin [29] zwei Jahre später ein einziges Axiom formulierte. Die Axiomensysteme, die sich in der Literatur durchgesetzt haben, sind jedoch größtenteils auf Huzitas Faltmöglichkeiten zurückzuführen. Für diese Arbeit wollen wir daher dieses Axiomensystem, ergänzt durch Katoris siebente Faltung, heranziehen.

### 5.1 Vorüberlegungen

Für Origami wird meistens quadratisches oder rechteckiges Papier verwendet und damit mit einer „endlichen“ Ebene gearbeitet. Wie schon bei den euklidischen Konstruktionsvorschriften, wollen wir davon eine Abstraktion machen und unser Medium als unendliche euklidische Ebene verstehen.

Nun ist allein das Falten erlaubt und die Verwendung eines weiteren Werkzeuges (wie beispielsweise einer Schere, eines Stifts oder eines Zirkels) untersagt. Es gibt viele Arten von Faltungen und nicht alle eignen sich für geometrische Konstruktionen. *Kurvenfaltungen* („curved folds“ [9]) und *Mehrfachfaltungen* („multi-fold“ [28]) sollen hier ausgeschlossen werden, da sie in der Praxis nicht so leicht umsetzbar sind. Wir werden den Begriff Einfachfaltungen („one-fold“ bzw. auch „single fold“ [5, 6, 28]) gebrauchen und unter *Papierfalten* einzelne Faltungen verstehen. Des Weiteren ist uns wichtig, dass jede Grundfaltung als eine einzelne Faltoption definiert wird. Bevor wir das Blatt Papier erneut falten, müssen wir es daher stets entfalten.

Jede Faltung liefert eine perfekte gerade Linie, weshalb jede Faltkante als eine Gerade aufzufassen ist. In Zukunft wollen wir diese Faltgerade als strichlierte Linie darstellen.

Bei der Betrachtung der euklidischen Konstruktionen sind wir davon ausgegangen, dass wir willkürlich Punkte auf der euklidischen Ebene zeichnen können. Analog wollen wir jetzt davon ausgehen, dass wir willkürlich Geraden auf der Ebene falten können. Während wir bei ersterem Punkte gegeben hatten, auf die wir die zugelassenen Werkzeuge angewandt haben, um so Geraden und Kreise und damit weitere Punkte zu erhalten, ist bei letzterem die geometrische Basiseinheit die Gerade in Form einer Faltkante.

Außerdem gilt im Axiomensystem die Regel, dass das Resultat eines Axioms wieder gegeben ist: Jede Faltkante, die ausgehend von konstruierten Elementen erhalten wurde, ist eine bereits konstruierte Gerade.

Bei jedem Faltungsvorgang werden Ebenenteile miteinander zur Deckung gebracht und deshalb alle Punkte  $P$  der Ebene auf andere Punkte  $P'$  gelegt. Da das Blatt Papier dabei nicht verzerrt wird, entspricht  $P'$  dem Spiegelpunkt von  $P$  bezüglich der Faltkante. In diesem Sinne ist jede Faltung eine Achsenspiegelung<sup>2</sup>.

Schließlich gelte noch die Regel, dass der Schnittpunkt zweier nicht-paralleler Geraden konstruiert werden kann. In der Literatur wird dieser Sachverhalt unterschiedlich festgelegt. Während manche dies als eigenes Axiom formulieren (s. [2, 12, 19]) oder als gesonderte Regel behandeln (s. [25]), wird es zumeist implizit angenommen. Jedenfalls können wir nur auf diese Art Punkte erhalten. Im Übrigen entspricht diese Forderung dem Axiom ( $E3$ ). Diesbezüglich sei erwähnt, dass die Bedeutung für die jeweiligen Systeme unterschiedlich ist. Im Fall von Origamics wird so definiert, wie Punkte als sekundäre geometrische Einheit zu verstehen sind. Im euklidischen Sinn ist das Axiom ( $E3$ ) den anderen Konstruktionsschritten nachgereiht. So müssen bereits zwei Geraden konstruiert worden sein, damit obige Konstruktion überhaupt existiert [23].

## 5.2 Huzita-Hatoris Grundfaltungen

Der japanische Mathematiker Humiaki Huzita präsentierte beim ersten internationalen Kongress für *Origami Science and Technology* im Jahr 1991 eine Liste von sechs verschiedenen Möglichkeiten, wie durch das Zusammenbringen von bereits gegebenen oder konstruierten Punkten und Geraden, einzelne Faltungen definiert werden. Diese Operationen nannte er selbst nicht Axiome, doch über die Jahre hinweg hat sich der Begriff *Huzita-Axiome* bzw. *Huzita-Hatori-Axiome* in der Literatur durchgesetzt.

Die folgenden sechs Grundfaltungen schlug Huzita für die Papierfaltkonstruktionen vor (vgl. [23, 28]):

---

<sup>2</sup> Aus diesem Grund ist es ratsam, dünnes, leicht durchsichtiges, Papier zu verwenden, um neue Punkte zu erhalten. Klassisches Origamipapier weist solche Eigenschaften auf, denn es ist einseitig mit einer Farbe bedruckt und auf der Rückseite weiß. Allerdings ist es recht teuer, weshalb sich als Alternative auch Backpapier anbietet. Des Weiteren kann man das gängige Papier beleuchten, oder gegen eine Fensterscheibe halten.

- (H1) Seien zwei Punkte  $P$  und  $Q$  gegeben. Dann kann man sie durch eine Faltgerade verbinden.
- (H2) Seien  $P$  und  $Q$  zwei Punkte in der Ebene. Dann kann  $P$  auf  $Q$  gefaltet werden.
- (H3) Seien zwei Geraden  $l_1$  und  $l_2$  gegeben. Dann kann man die eine Gerade auf die andere falten.
- (H4) Seien ein Punkt  $P$  und eine Gerade  $l$  gegeben. Dann kann man eine Gerade falten, die senkrecht auf die gegebene Gerade  $l$  steht und durch den Punkt  $P$  geht.
- (H5) Seien eine Gerade  $l$  und zwei Punkte  $P$  und  $Q$ , die nicht auf  $l$  liegen, gegeben. Dann kann man eine Gerade falten, die  $P$  auf  $l$  legt, sodass die Faltgerade durch  $Q$  geht.
- (H6) Seien zwei Punkte  $P$  und  $Q$ , sowie zwei Geraden  $l_1$  und  $l_2$ , gegeben. Dann kann man eine Gerade falten, die  $P$  auf  $l_1$  und  $Q$  auf  $l_2$  legt.

Zur selben Zeit veröffentlichte Justin [25] eine Liste von sieben verschiedenen Operationen, die eine weitere Möglichkeit enthielt und Huzita übersehen hatte. In ähnlicher Weise formuliert lautet diese letzte Grundfaltung folgendermaßen:

- (H7) Seien ein Punkt  $P$  und zwei Geraden  $l_1$  und  $l_2$  gegeben. Dann kann man eine Gerade falten, die  $P$  auf  $l_1$  legt und die andere Gerade auf sich selbst.

Justins Arbeiten wurden damals übersehen und es war der Japaner Koshiro Hatori [15], der 2002 diese siebente Faltung wiederentdeckte.

### 5.3 Genauere Beschreibung der Grundfaltungen

Da der Faltungsvorgang mancher Axiome gedanklich nicht so leicht nachvollziehbar ist und das Resultat nicht sofort einleuchten mag, wollen wir die Axiome nun einzeln untersuchen. Dabei sind die Erklärungen an Geretschläger [11], Hull [23] und Alperin [2] angelehnt.

Das Axiom (H1) besagt, dass zu zwei gegebenen Punkten eine Gerade gefaltet werden kann, die beide miteinander verbindet. Die entstehende Faltgerade ist somit die Verbindungsgerade der beiden Punkte.

Führt man Axiom (H2) aus, so stellt man fest, dass die entstehende Faltgerade orthogonal zur Verbindungslinie  $PQ$  steht. Es handelt sich um die Mittelsenkrechte der Strecke, deren Endpunkte die beiden Punkte  $P$  und  $Q$  sind.

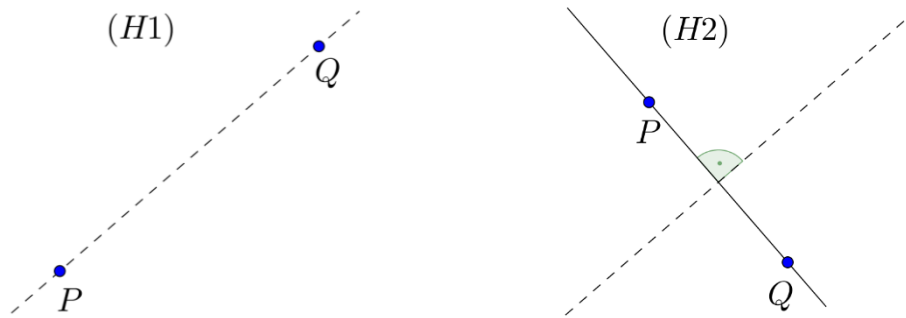


Abbildung 3: Huzita-Hatori-Axiom 1 und 2

Für Axiom (H3) gibt es zwei mögliche Ausführungen. Die beiden gegebenen Geraden können sich schneiden oder parallel zueinander liegen. Verlaufen die beiden Geraden echt parallel zueinander, so gibt es eine Art, wie die eine auf die andere gefaltet werden kann und man erhält die Mittelparallele (s. Abbildung 4). Schneiden sich die beiden Geraden, so gibt es zwei Möglichkeiten sie aufeinander zu falten. Man erhält die zwei Winkelhalbierenden als Faltgeraden.

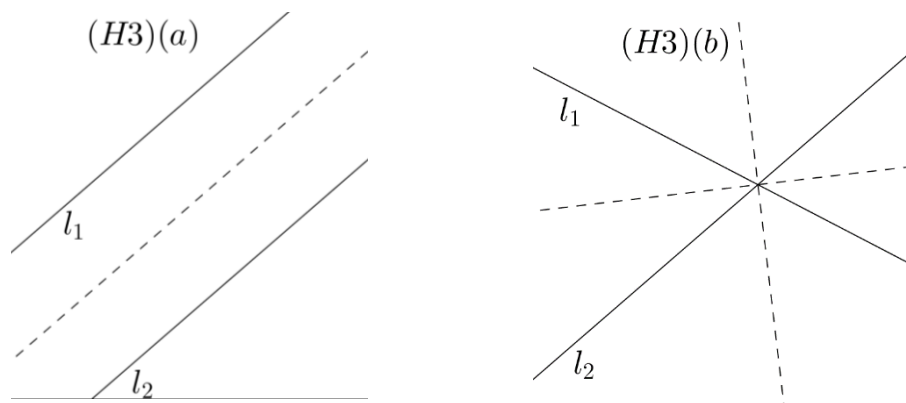


Abbildung 4: Huzita-Hatori-Axiom 3

Axiom (H4) besagt, dass man eine Faltgerade durch einen gegebenen Punkt legen kann, die senkrecht auf eine gegebene Gerade steht. Wie der Abbildung 5 entnommen werden kann, wird dazu die Gerade auf sich selbst gefaltet. Die entstehende Faltgerade ist das Lot auf die Gerade  $l$ .

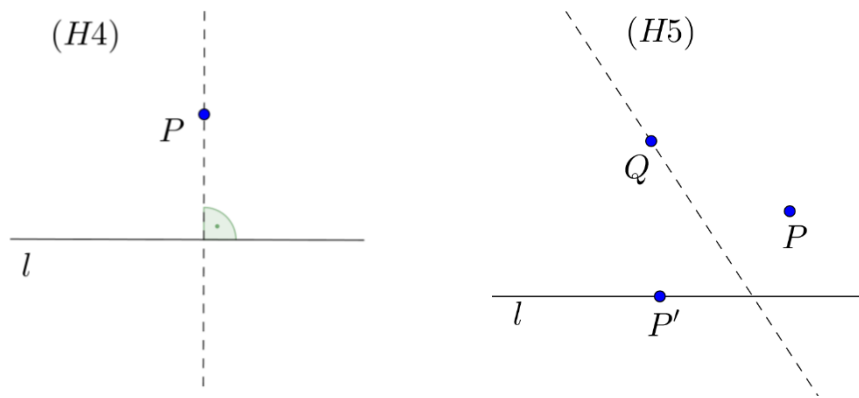


Abbildung 5: Huzita-Hatori-Axiom 4 und 5

Axiom (H5) bedarf einer ausführlicheren Erklärung. Abbildung 5 verdeutlicht den Faltungsvorgang. Die Konstruktion lässt sich am einfachsten durchführen, wenn man  $P$  zu  $P'$  auf  $l$  faltet und danach so lange auf  $l$  gleiten lässt, bis die Faltlinie durch  $Q$  verläuft.

Zum besseren Verständnis des Resultats führen wir folgende Übung durch: Wir nehmen ein Blatt Papier und wählen einen Rand als Gerade  $l$ . In der Nähe dieses Randes wählen wir einen Punkt  $P$  (gemäß Abbildung 6). Dann wählen wir einen zweiten Punkt  $P'$  an einer beliebigen Stelle auf  $l$ . Nun falten wir das Blatt derart, dass  $P'$  mit  $P$  zur Deckung gebracht wird. Wir entfalten das Blatt wieder und führen den Vorgang noch einmal mit einem neu gewählten Punkt  $P''$  durch. Das ganze Spiel wiederholen wir so lange, bis uns auffällt, dass die Faltkanten eine parabelförmige Fläche einhüllen. Es liegt für uns nahe zu vermuten, dass jede Faltkante, die durch das Falten von Punkten von  $l$  auf  $P$  entsteht, eine Tangente der Parabel mit Brennpunkt  $P$  und Leitlinie  $l$  ist.

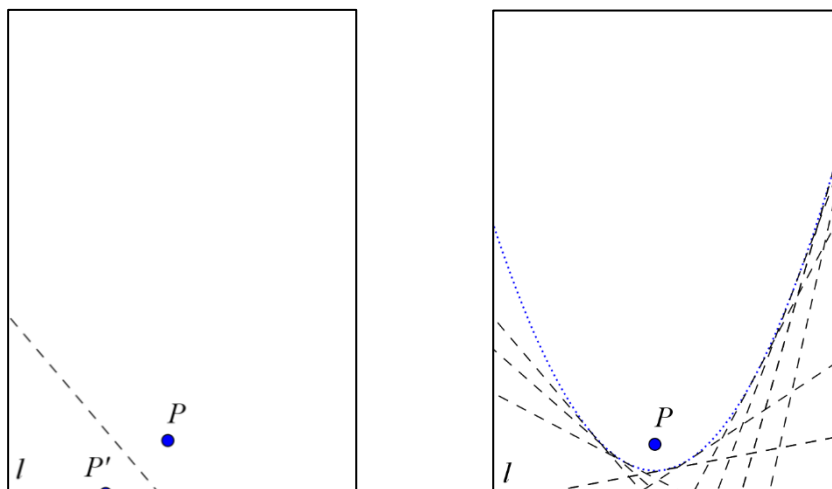


Abbildung 6: Interpretation von Axiom 5 (nach [18, 22])

Für den Beweis rufen wir uns die Eigenschaften einer Parabel in Erinnerung. Bekanntlich ist eine Parabel die Menge aller Punkte, die von einem Punkt (dem Brennpunkt) denselben Abstand wie von einer Geraden (der Leitlinie) haben. Durch das Falten von  $P'$  auf  $P$  entsteht eine Faltgerade  $c$ , die orthogonal zur Verbindungsstrecke  $PP'$  steht und diese halbiert. Es handelt sich also um die Streckensymmetrale. Der Punkt  $X$ , der auf  $c$  und auf der Normalen zu  $l$  durch  $P'$  liegt, hat denselben Abstand von  $P$  und  $l$  und ist somit Punkt der Parabel.

Kann man zeigen, dass auf  $c$  keine weiteren Punkte der Parabel liegen, so ist  $c$  Tangente der Parabel.

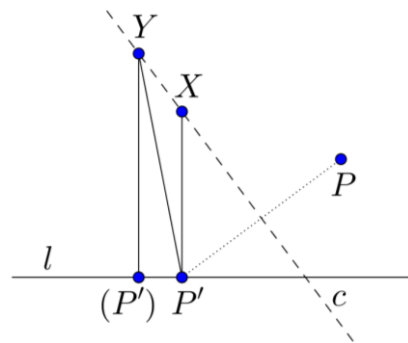


Abbildung 7: Beweis des Resultats von Axiom 5 (nach [11])

### Beweis.

Angenommen es gebe einen weiteren Punkt  $Y \neq X$  auf  $c$ . Dieser müsste, laut Definition der Parabel, von  $P$  und  $l$  den gleichen Abstand haben. Da der Punkt  $Y$  auf der Streckensymmetrale von  $PP'$  liegt, ist er von  $P$  und  $P'$  gleich weit entfernt und es gilt  $YP = YP'$ . Sei nun  $(P')$  der Lotfußpunkt auf  $l$ . Da das Dreieck  $\triangle P'(P')Y$  rechtwinklig ist, ist die Kathete  $Y(P')$  sicher kürzer als die Hypotenuse  $YP'$  und es folgt  $Y(P') < YP' = YP$ . Der Punkt  $Y$  kann also unmöglich von  $P$  und  $l$  gleichweit entfernt sein und  $X$  ist der einzige Punkt der Parabel auf  $c$ . Die Faltkante  $c$  ist folglich eine Tangente der Parabel [2].

■

Sind also eine Gerade  $l$  und ein Punkt  $P$  gegeben, dann kann jede beliebige Tangente der Parabel mit Brennpunkt  $P$  und Leitlinie  $l$  gefaltet werden. Insbesondere können die Tangenten der Parabel, die durch einen beliebigen Punkt  $Q$  verlaufen, gefaltet werden.

Je nach Lage der Punkte, gibt es eine, zwei oder keine Tangenten (s. Abbildung 8). Diesen Sachverhalt kann man sich vor Augen führen, wenn man bedenkt, dass  $|PQ| = |P'Q|$  gilt und  $P'$  der Schnittpunkt der Geraden  $l$  mit dem Kreis ist, dessen Mittelpunkt  $Q$  ist und der durch  $P$  verläuft. In der linken Grafik ist  $|PQ| < d(Q, l)$ , deshalb haben der Kreis und die Gerade keinen gemeinsamen Schnittpunkt und die Grundfaltung hat keine Lösung.

Ist  $|PQ| = d(Q, l)$ , so gibt es genau einen Schnittpunkt  $P'$  und die Mittelsenkrechte  $PP'$  ist die Tangente an die Parabel. Zwei Tangenten erhält man genau dann, wenn der Kreis zwei Schnittpunkte  $P'$  und  $P''$  hat (vgl. [14]).

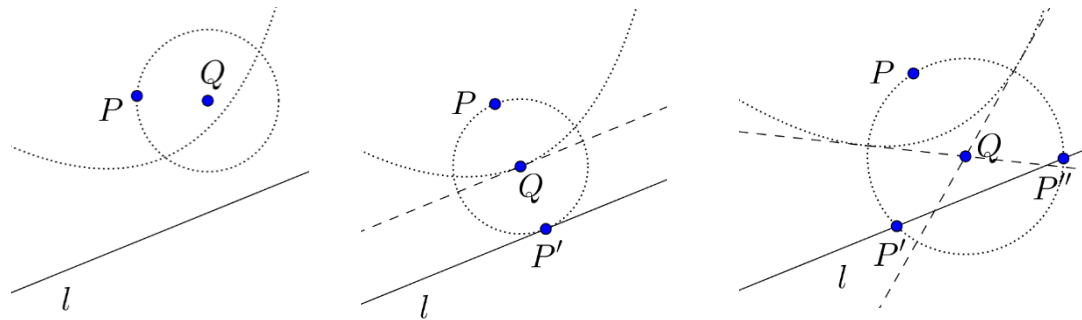


Abbildung 8: Anzahl der Tangenten in Axiom 5

Der Faltungsvorgang (H6) ist dem von (H5) sehr ähnlich. Anstatt, dass ein Punkt auf eine Gerade gefaltet wird, werden zwei Punkte auf zwei Geraden gefaltet, wie in Abbildung 6. Man führt diese Konstruktion am besten aus, indem man zunächst  $P$  auf  $l_1$  faltet und danach  $P$  auf  $l_1$  gleiten lässt und gleichzeitig beobachtet, wie der Punkt  $Q$  seine Position verändert, bis dieser dann auf der zweiten Geraden liegt.

(H6)

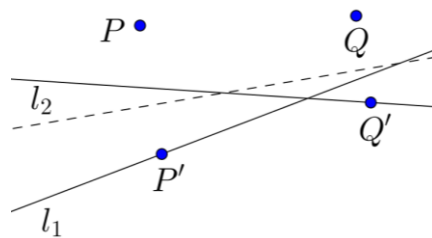


Abbildung 9: Huzita-Hatori-Axiom 6

Wir haben gesehen, dass in Axiom (H5) die entstehende Faltgerade eine Tangente an die Parabel darstellt, die durch den Punkt und durch die Gerade definiert ist. Wir vermuten deshalb, dass die erzeugte Faltkante in Axiom (H6) zwei Parabeln tangiert. Tatsächlich liefert das gleichzeitige Hinüberfalten von  $P$  auf  $l_1$  und  $Q$  auf  $l_2$  als Faltgerade eine gemeinsame Tangente zweier Parabeln mit den entsprechenden Brennpunkten  $P$  und  $Q$  und den Leitlinien  $l_1$  und  $l_2$ . Genau genommen können das Resultat des Axioms bis zu drei Faltkanten sein, sodass davon ausgegangen werden kann, dass Gleichungen dritten

Grades gelöst werden können (s. 6.2). Die Konstellation in Abbildung 10 ermöglicht das Legen dreier Tangenten<sup>3</sup>.

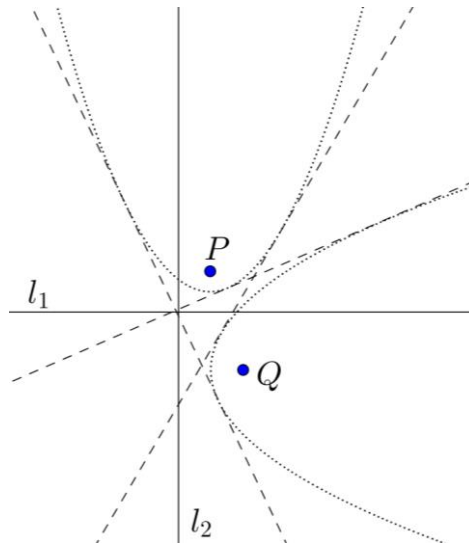


Abbildung 10: Drei Tangenten an zwei Parabeln

Abbildung 11 soll uns den Vorgang in Axiom (H7) verdeutlichen. Die erzeugte Foldgerade steht normal auf die Gerade  $l_2$  und entspricht der Tangente an die Parabel mit Brennpunkt  $P$  und Leitlinie  $l_1$ .

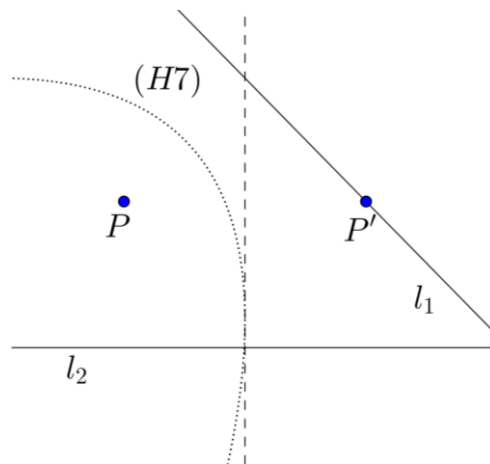


Abbildung 11: Huzita-Hatori-Axiom 7

Für diese Operation gibt es bis zu zwei Foldgeraden. Tangiert die, auf sich selbst zu faltende, Gerade  $l_2$  die Parabel, so gibt es zwei Möglichkeiten den Punkt  $P$  auf  $l_1$  zu falten. Die erste

<sup>3</sup> Zur besseren Lesbarkeit wurden die Spiegelpunkte nicht eingezeichnet.

Faltgerade ist die Tangente an die Parabel, die normal auf  $l_2$  steht. Die zweite Faltgerade ist genau  $l_2$ .

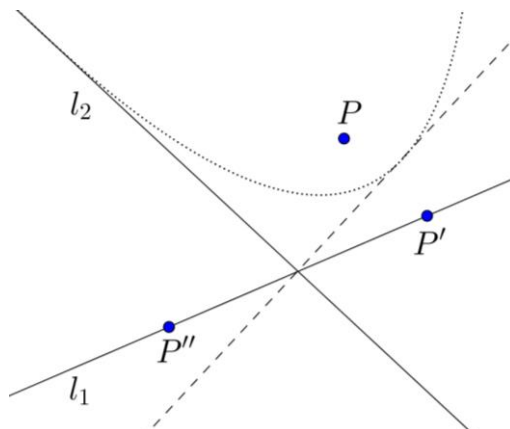


Abbildung 12: Konstellation für zwei Faltgeraden in Axiom 7

An den letzten drei Grundfaltungen ist zu erkennen, dass Parabeln bzw. die Menge der Tangenten von Parabeln eine grundlegende Rolle beim Falten spielen. Genau genommen entspricht die Rolle, die Parabeln im Rahmen der Papierfaltkonstruktionen einnehmen, die der Kreise bei den euklidischen Konstruktionen.

## 5.4 Ausführbarkeit der Grundfaltungen

Huzita-Hatoris Axiome gelten nicht in allen Lagen der Grundelemente Punkt und Gerade. In der Literatur wird nicht explizit beschrieben, welche Fälle zulässig sind [35]. In diesem Abschnitt wollen wir deshalb der Frage nachgehen, ob die Grundfaltungen immer ausführbar sind. Die Notation  $Element \rightarrow Element$  beschreibt dabei den Abbildungsvorgang.

(H1):  $(P \rightarrow P, Q \rightarrow Q)$

Eine eindeutige Bestimmung der Faltgerade ist nur dann möglich, wenn die beiden Punkte voneinander verschieden sind. Sind die beiden Punkte  $P$  und  $Q$  nämlich ident, dann gibt es unendlich viele Möglichkeiten, durch diese eine Gerade zu legen.

(H2):  $(P \rightarrow Q)$

Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es eine eindeutige Faltgerade, die den einen Punkt auf den anderen Punkt legt. Es handelt sich um die Mittelsenkrechte der beiden Punkte. Bei zwei identen Punkten kann jedoch jede Faltgerade diese Bedingung erfüllen.

(H3):  $(l_1 \rightarrow l_2)$

In Axiom (H3) haben wir zwischen parallelen und sich schneidenden Geraden  $l_1$  und  $l_2$  unterschieden und so jeweils eine bzw. zwei Faltkanten erhalten. Sind die beiden gegebenen Geraden ident, können diese auf unendlich viele Weisen auf sich selbst abgebildet werden. Eine Faltgerade ist nämlich die gegebene Gerade selbst, also  $l_1 = l_2$ . Es lassen sich aber auch unendlich viele zu  $l_1 = l_2$  orthogonale Faltgeraden finden.

(H4):  $(P \rightarrow P, l \rightarrow l)$

Die Operation (H4) führt zu einer eindeutigen Faltgeraden, wenn  $P$  nicht mit der gegebenen Gerade  $l$  inzidiert. Liegt  $P$  allerdings auf  $l$ , so gibt es zwei mögliche Resultate des Faltungsvorganges: die eine Faltgerade ist die Gerade  $l$ , die andere ist die auf  $l$  orthogonale und durch  $P$  verlaufende Gerade.

(H5):  $(P \rightarrow l, Q \rightarrow Q)$

Die Grundfaltung (H5) liefert die Tangente an die Parabel  $p(P, l)$  durch den Punkt  $Q$ . Wie bereits festgestellt, hängt die Anzahl der Faltgeraden vom Abstand des Punktes  $Q$  zu  $P$  und der Geraden  $l$  ab. Für  $|PQ| = d(Q, l)$  erhält man eine Faltgerade, für  $|PQ| > d(Q, l)$  zwei und für  $|PQ| < d(Q, l)$  keine.

Bleibt zu überlegen, was passiert, wenn die beiden Punkte mit der Geraden  $l$  inzidieren. Für  $P \in l \wedge Q \in l$  beschreibt die Faltkante die Lotgerade durch  $Q$ , was dem Resultat von (H4) entspricht (Abbildung 13 a). Gilt  $P \in l$  und  $Q \notin l$ , so erzeugt der Faltungsvorgang die Verbindungsgerade  $PQ$ , sowie die Lotgerade durch  $Q$ . Dieser Fall ist somit durch die

leichteren Operationen (H1) und (H4) abgedeckt (b). Gilt umgekehrt  $P \notin l$  und  $Q \in l$  (und damit insbesondere  $|PQ| > d(Q, l)$ ), erhält man zwei Faltkanten (c). Im Fall  $P = Q \in l$  ist die Grundfaltung auf unendlich viele Weisen ausführbar (d).

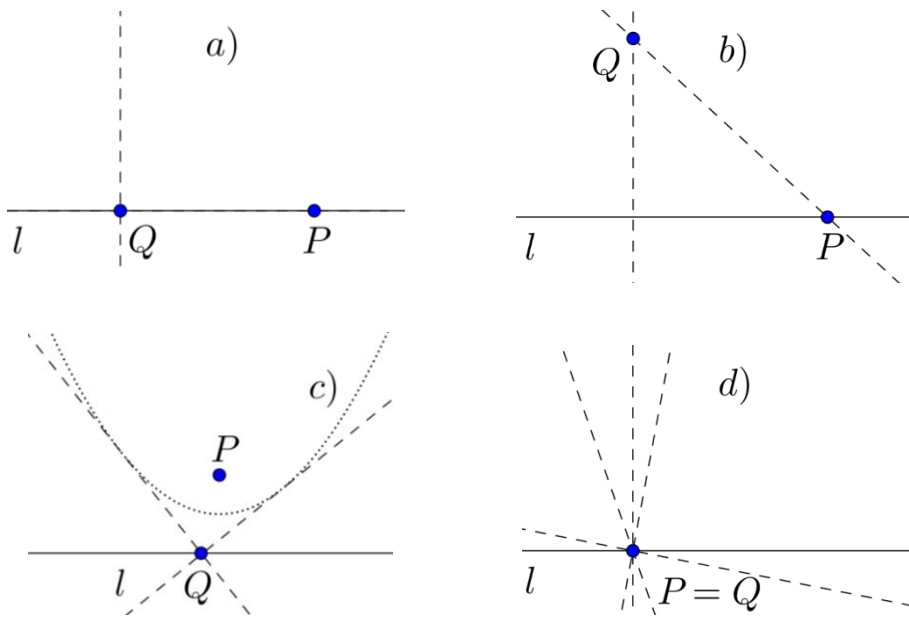


Abbildung 13: Ausführbarkeit von Axiom 5

Alle Ergebnisse zusammenfassend zeigt sich, dass (H5) ausführbar ist, wenn  $P \neq Q$  nicht auf  $l$  liegen und  $Q$  auf der gleichen Seite der Parabel  $p(P, l)$  liegt wie  $l$  (vgl. hierfür [14]).

(H6):  $(P \rightarrow l_1, Q \rightarrow l_2)$

Wie bereits bekannt, gibt es zu zwei verschiedenen Punkten  $P$  und  $Q$  bis zu drei Faltkanten, die  $P$  auf eine gegebene Gerade  $l_1$  und  $Q$  auf eine gegebene Gerade  $l_2$  abbilden. Sind die beiden Punkte gleich und die beiden Geraden voneinander verschieden, so erhält man die einzige gemeinsame Faltkante durch das Falten des Punktes auf den Schnittpunkt der beiden Geraden (Abbildung 14).

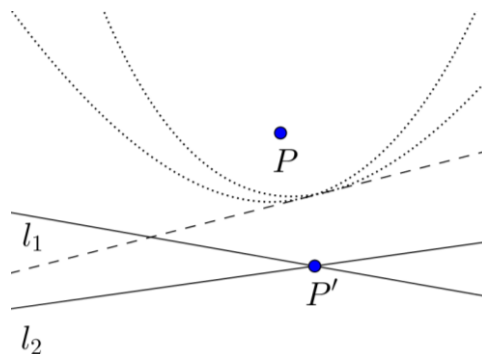


Abbildung 14: Eine gemeinsame Tangente in Axiom 6

Sind die beiden Punkte voneinander verschieden und fallen die beiden Geraden zusammen, können zwei Geraden gefaltet werden. Es handelt sich um die beiden Winkelhalbierenden von  $l_1 = l_2$  und der Verbindungsgerade  $PQ$  (Abbildung 15, links). Selbiges Ergebnis erhält man, wenn die beiden Punkte auf den jeweils anderen Geraden liegen (Abbildung 15, rechts).

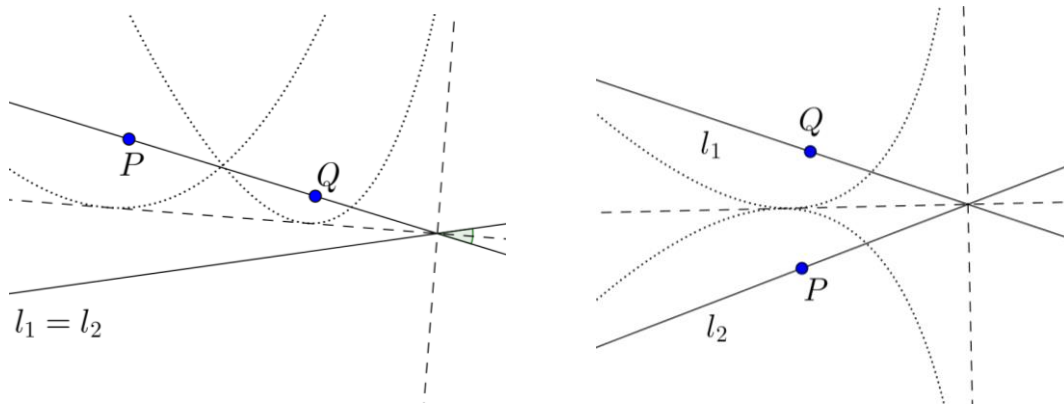


Abbildung 15: Zwei gemeinsame Tangenten in Axiom 6

Aber es gibt Fälle, die zu unendlich vielen Faltkanten führen. Liegt ein Punkt bereits auf der gewünschten Geraden und muss der andere erst auf „seine“ Gerade gefaltet werden, so lässt sich die Operation auf unendlich viele Weisen ausführen (Abbildung 16 a). Liegen beide Punkte bereits auf den gewünschten Geraden und verlaufen die beiden parallel zueinander, so sind ebenfalls unendlich viele Faltungen möglich (Abbildung 16 b). Für den Fall, dass die Geraden parallel verlaufen und beide Punkte auf ein und derselbe Geraden liegen, liegt Situation (H5) vor (Abbildung 16 c).

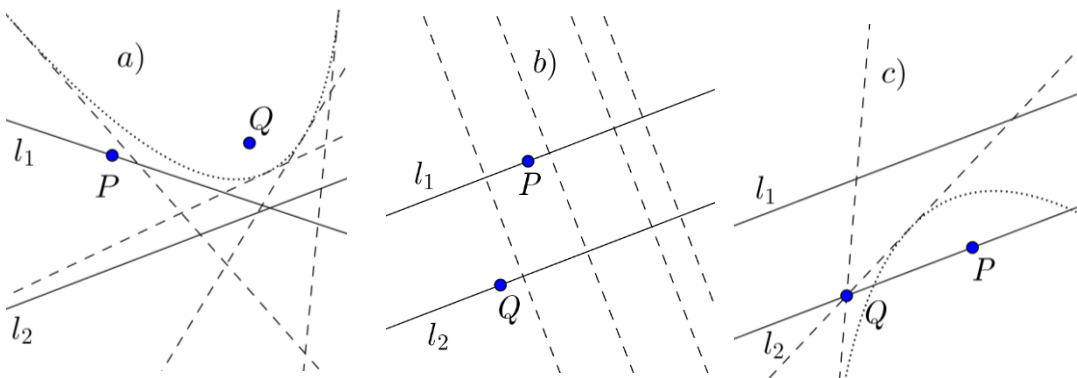


Abbildung 16: Sonderfälle in Axiom 6

Fallen sowohl die beiden Punkte, als auch die beiden Geraden zusammen (Abbildung 17 a), ist keine eindeutige Bestimmung der Faltgerade möglich. Schließlich sind bei identen Punkte - Geradepaaren, also  $(P, l_1) = (Q, l_2)$ , ebenfalls unendlich viele Faltungen möglich.

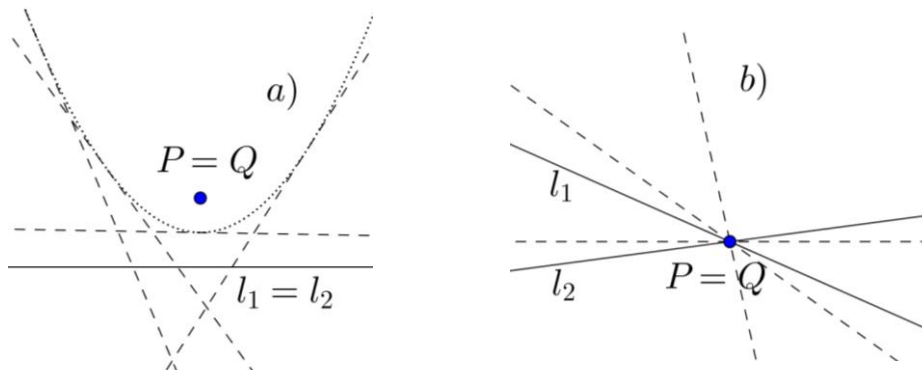


Abbildung 17: Unendlich viele Möglichkeiten Axiom 6 auszuführen

**(H7):**  $(P \rightarrow l_1, l_2 \rightarrow l_2)$

Sind die beiden Geraden parallel und liegt  $P$  auf keiner der beiden Geraden, dann existiert die gesuchte Faltgerade nur, wenn  $l_2$  die Mittelparallele zu  $l_1$  und der Parallelen zu  $l_1$  durch  $P$  ist. Die Faltgerade ist dann genau  $l_2$  (Abbildung 18). In allen anderen Fällen  $P \notin l_1 \parallel l_2$  ist die Operation nicht durchführbar. Sind die beiden Geraden echt parallel und liegt  $P$  bereits auf der gewünschten Gerade, so gibt es unendlich viele Faltgeraden.

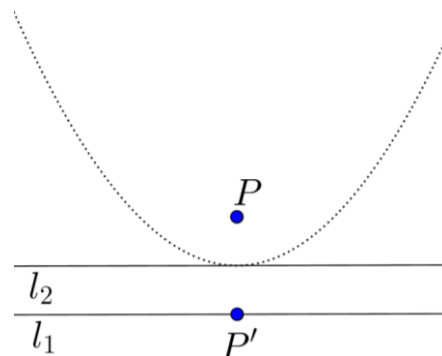


Abbildung 18: Einzig mögliche Konstellation für begrenzte Faltkantenanzahl bei parallelen Geraden in Axiom 7

Die Betrachtungen zeigen auf, dass die Ausführbarkeit der Huzita-Hatori-Axiome nicht immer gegeben ist. In Tabelle 1 werden die Voraussetzungen aufgelistet, unter denen der Faltungsvorgang möglich ist, wobei es nur eine beschränkte Anzahl an Faltgeraden gibt<sup>4</sup>. Eine bereits konstruierte Gerade wurde dabei nicht als eine mögliche Faltgerade

<sup>4</sup> Die Tabelle ist angelehnt an die von Justin [25]; Operation 3 entspricht dabei (H4), Operation 5 (H3), Operation 4 (H7) und Operation 7(H6).

interpretiert, da das Resultat jeder Grundfaltung eine neue Gerade sein soll. Außerdem wurden jene Fälle, die zu Resultaten anderer Grundfaltungen führen eliminiert.

Der Tabelle können wir entnehmen, dass es drei Grundfaltungen mit einer, zwei Grundfaltungen mit bis zu zwei und eine Grundfaltung mit bis zu drei Fallgeraden gibt. Die geometrische Interpretation dreier Grundfaltungen ist die einer oder mehrerer Tangente(n) an eine oder zwei Parabeln. In den ersten vier Axiomen (H1) bis (H4), sowie im letzten Axiom (H7), wird gefordert, dass die gegebenen Elemente nicht miteinander inzidieren. Damit das Resultat von (H5) eindeutig ist, gibt es noch eine weitere Voraussetzung. Für einen eindeutigen Faltungsvorgang (H6) muss weitaus mehr gelten.

Grundfaltung	Voraussetzung	Resultat	Anzahl
(H1) ( $P \rightarrow P, Q \rightarrow Q$ )	$P \neq Q$	Gerade $l = PQ$	1
(H2) ( $P \rightarrow Q$ )	$P \neq Q$	Mittellot der Strecke $PQ$	1
(H3) ( $l_1 \rightarrow l_2$ )	$l_1 \neq l_2$	$l_1 \parallel l_2$ : Mittelparallele von $l_1$ und $l_2$ $l_1 \nparallel l_2$ : Winkelhalbierende v. $l_1$ und $l_2$	1, 2
(H4) ( $P \rightarrow P, l \rightarrow l$ )	$P \notin l$ $P \in l$	Lotgerade $l'$ auf $l$ mit $P \in l'$ selbe Gerade + Gerade $l$	1 2
(H5) ( $P \rightarrow l, Q \rightarrow Q$ )	$[(P \neq Q) \notin l] \wedge$ [ $Q$ liegt auf der gleichen Seite der Parabel $p(P, l)$ wie $l$ ]	Tangente(n) durch $Q$ an die Parabel $p(P, l)$	1, 2
(H6) ( $P \rightarrow l_1, Q \rightarrow l_2$ )	$[P \notin l_1 \vee Q \notin l_2] \wedge$ $[P \notin l_1 \vee Q \notin l_2 \vee l_2 \cap l_2 = \emptyset]$ $\wedge [(P, l_1) \neq (Q, l_2)]$ $\wedge [\{P, Q\} \notin l_1 \cap l_2^5]$	Gemeinsame Tangente(n) der Parabeln $p_1(P, l_1)$ und $p_2(Q, l_2)$	1, 2, 3
(H7) ( $P \rightarrow l_1, l_2 \rightarrow l_2$ )	$P \notin l_1 \vee l_1 \nparallel l_2$	Tangente(n) der Parabel $p(P, l_1)$ , die normal auf $l_1$ steht oder mit $l_1$ ident ist	1, 2

Tabelle 1: Huzita-Hatori-Axiome mit Voraussetzungen für beschränkte Anzahl an Fallgeraden

<sup>5</sup> Die erste Aussage schließt Fall in Abbildung 16 a), die zweite Fall in Abbildung 16 b), die dritte Fall in Abbildung 17 a) und die letzte in Abbildung 17 b) aus.

## 5.5 Bemerkungen zu Huzita-Hatoris Axiomensystem

Abschließend stellen wir uns die Frage, ob sich die Resultate der einzelnen Axiome mit Hilfe der anderen Axiome konstruieren lassen, ob wir die Axiome also herleiten können.

Wir stellen fest, dass dies bereits für das erste Axiom der Fall ist. Es ist nämlich möglich, eine Gerade durch zwei gegebene Punkte  $P$  und  $Q$  zu legen, ohne von der Grundfaltung (H1) Gebrauch zu machen (Abbildung 19).

Geht man von zwei gegebenen Punkten  $P$  und  $Q$  aus, so kann zunächst mittels (H4) das Mittellot  $l_1$  der Strecke  $PQ$  gefaltet werden. Anschließend kann man die Gerade  $l_2$  falten, die durch  $Q$  verläuft und  $P$  auf  $l_1$  legt. Durch abermalige Anwendung von (H5) kann schließlich eine Gerade  $l_3$  konstruiert werden, die durch  $P$  verläuft und  $Q$  auf  $l_2$  legt. Da aber  $Q$  bereits auf  $l_2$  liegt, handelt es sich bei dieser letzten Faltgerade um die Gerade durch  $P$  und  $Q$ .

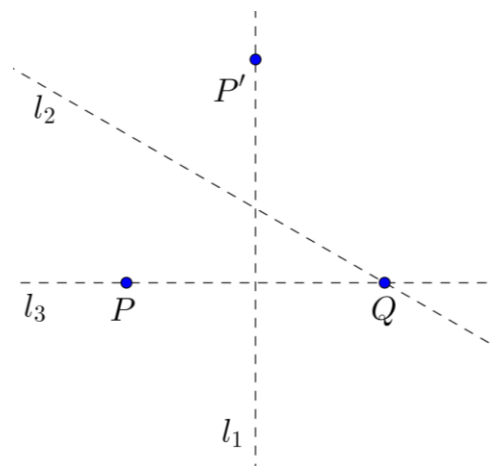


Abbildung 19: Konstruktion einer Geraden mit Origami

Grundfaltung (H3) kann ebenfalls hergeleitet werden. Für die Konstruktion der Winkelhalbierenden zweier sich schneidender Geraden  $l_1$  und  $l_2$  ermitteln wir zunächst deren Schnittpunkt  $Q$ . Wählen wir nun einen Punkt  $P$  auf  $l_1$ , den wir mittels (H5) auf  $l_2$  falten, wobei die Faltkante durch  $Q$  verlaufen soll, so sind die entstehenden Faltkanten die beiden gesuchten Winkelhalbierenden von  $l_1$  und  $l_2$ .

Verlaufen die beiden gegebenen Geraden echt parallel zueinander, dann können wir auch die Mittelparallele konstruieren. Wieder wählen wir einen Punkt  $P$  auf  $l_1$ . Durch diesen falten wir mittels (H4) die Lotgerade  $l_3$  auf  $l_2$ . Die Faltkante, die durch das Falten von  $P$  auf den Schnittpunkt von  $l_2$  und  $l_3$  entsteht (H2), ist dann die gesuchte Gerade.

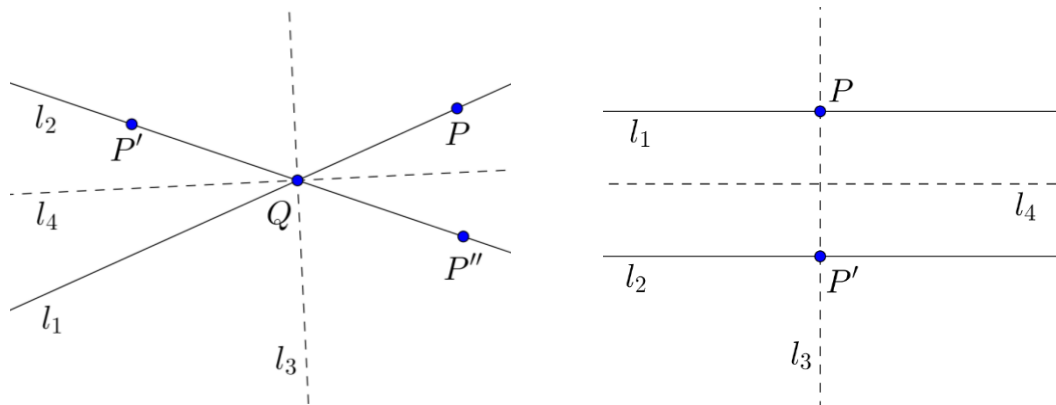


Abbildung 20: Konstruktion der Winkelhalbierenden und der Mittelparallelen mit Origami

Somit zeigt sich, dass bereits für zwei der sieben Axiome insgesamt nur drei Axiome erforderlich sind. George E. Martin kann beweisen, dass tatsächlich eine einzige Operation (die sogenannte *fundamental folding operation*) ausreicht, um die Papierfaltkonstruktionen formal zu beschreiben:

If for two given points  $P$  and  $Q$  and for given lines  $p$  and  $q$  there are only a finite number of lines  $t$  such that both  $P^t$  is on  $p$  and  $Q^t$  is on  $q$ , then we may fold the paper along each of these lines  $t$ . [29, S. 149]

Wir erkennen, dass sich hinter Martins Operation das Axiom (H6) verbirgt. Offensichtlich kann die obig hergeleitete Grundfaltung (H3) als Spezialfall von Grundfaltung (H6) betrachtet werden. Wählt man nämlich  $P$  auf  $l_1$  und  $Q$  auf  $l_2$ , erhält man - nach Ausführen der Operation - dasselbe Ergebnis.

Einen ausführlichen Beweis dafür, dass sich alle Grundfaltungen durch Martins *fundamental folding operation* ersetzen lassen, findet man in [15, 35]. An dieser Stelle sei lediglich bemerkt, dass sich durch das Entfernen der anderen sechs Axiome nichts an der Mächtigkeit des Systems ändert und alle Konstruktionsmöglichkeiten erhalten bleiben. Man könnte sich aus „ökonomischen“ Gründen auf Martins Axiom beschränken. Die Durchführung von geometrischen Konstruktionen wird dadurch aber erschwert, weshalb es didaktisch sinnvoller ist, diese Faltung in die anderen Grundfaltungen einzugliedern [35].

## 6 Vergleich Euklid – Origamics

Nun, da wir zwei Axiomensysteme untersucht haben, liegt es auf der Hand, diese zu vergleichen. Wir haben bereits gesehen, dass das Ausführen geometrischer Konstruktionen nach den euklidischen Methoden zu Punkten, Geraden und Kreisen führt und, dass das Ausführen geometrischer Konstruktionen mit den Methoden des Papierfaltens Falteraden und Punkte erzeugt. Demnach arbeiten beide Systeme zumindest mit ähnlichen Objekten. Allerdings haben wir auch herausgefunden, dass die Basiseinheit von Origamics die Falterade ist und, dass Punkte erst als Schnittobjekte zweier Falteraden erzeugt werden. In der euklidischen Geometrie bilden jedoch Punkte die Basiseinheit und Geraden werden erst durch zwei Punkte definiert.

Der folgende Abschnitt soll klären, welches der beiden Systeme mächtiger ist, welches System also das Lösen von komplizierteren Problemen ermöglicht. Als Referenzsystem für den Vergleich dient die Algebra (vgl. [8]).

### 6.1 Algebraische Analyse der euklidischen Operationen

Bei der algebraischen Analyse der euklidischen Konstruktionsmöglichkeiten wird ein kartesisches Koordinatensystem über die Ebene gelegt. Ein Punkt entspricht einem Koordinatenpaar  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  und eine Gerade, die mit dem Lineal erzeugt wird, entspricht der Menge aller Punkte  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , die eine Gleichung in zwei Variablen lösen. Die Gleichung ist von der Form

$$c = ax + by$$

mit reellen Koeffizienten  $a, b$  und  $c$ .

Gleichermaßen sind Kreise, die mit dem Zirkel erzeugt werden, die Menge aller Punkte  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , die eine quadratische Gleichung in zwei Variablen der Form

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

lösen.

Bevor wir mit der Übersetzung der euklidischen Axiome in die Sprache der Algebra beginnen, wollen wir darauf hinweisen, dass es auch hier bei den meisten Axiomen Spezialfälle gibt, die andere Ergebnisse als die angegebenen liefern. Es ist an dieser Stelle jedoch nicht relevant, auf die Spezialfälle genauer einzugehen - wir betrachten jeweils die allgemeine Lage.

Das Axiom (E1) ermöglicht das Konstruieren einer Geraden durch zwei gegebene Punkte. In der Sprache der Algebra formuliert bedeutet es, dass aus zwei Koordinatenpaaren eine lineare Gleichung extrapoliert werden kann.

$$(m, n), (u, v) \rightarrow c = ax + by$$

Das Axiom (E2) erlaubt die Konstruktion von Kreisen. Aus einem Koordinatenpaar und einem Parameter erhält man eine quadratische Gleichung.

$$(a, b), r \rightarrow r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

In Axiom (E3) wird der Schnittpunkt zweier Geraden ermittelt, was der Auflösung eines Gleichungssystems in zwei Variablen mit zwei linearen Gleichungen entspricht und im Allgemeinen zu einem Koordinatenpaar führt.

$$c = ax + by$$

$$g = ex + fy$$

$$\rightarrow (m, n)$$

Das Axiom (E4) ermöglicht die Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises und entspricht somit der Auflösung eines Gleichungssystems mit einer linearen und einer quadratischen Gleichung. Im allgemeinen Fall liefert dies zwei mögliche Koordinatenpaare.

$$c = ax + by$$

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

$$\rightarrow (m_1, n_1), (m_2, n_2)$$

Durch das letzte Axiom (E5) können die Schnittpunkte zweier Kreise bestimmt werden. Diese sind Lösungen eines Gleichungssystems in zwei Variablen mit zwei quadratischen Gleichungen.

$$r_1^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

$$r_2^2 = (x - c)^2 + (y - d)^2$$

$$\rightarrow (m_1, n_1), (m_2, n_2)$$

Zusammenfassend gilt für die euklidische Geometrie, dass aus Koordinatenpaaren lineare und quadratische Gleichungen konstruiert werden können. Außerdem lassen sich aus

linearen und quadratischen Gleichungen Koordinatenpaare ermitteln und damit Gleichungen bis zum Grad zwei lösen.

## 6.2 Algebraische Analyse der Grundfaltungen

Für eine algebraische Analyse der Papierfaltkonstruktionen kann in derselben Weise vorgegangen werden. Punkte werden als variable Koordinatenpaare betrachtet und jede Faltgerade entspricht einer Geraden und kann als eine Punktmenge aufgefasst werden, die durch geordnete Koordinatenpaare  $(x, y)$  dargestellt wird.

Die Grundfaltungen (H1) und (H2) entsprechen somit der Konstruktion einer linearen Gleichung aus zwei Koordinatenpaaren.

$$(m, n), (u, v) \rightarrow c = ax + by$$

Die Konstruktion der Winkelhalbierenden zweier, sich schneidenden, Geraden bzw. der Mittelparallelen zweier paralleler Geraden (H3) kommt der Konstruktion einer linearen Gleichung aus zwei anderen linearen Gleichungen gleich. Diese Konstruktion entspricht dem Lösen einer Gleichung zweiten Grades. Das erkennt man auch daran, dass es für diese Konstruktion zwei Lösungen gibt.

$$c = ax + by$$

$$g = ex + fy$$

$$\rightarrow j_{1,2} = h_{1,2}x + i_{1,2}y$$

Für das Errichten der Lotgerade (H4), wird aus einem Koordinatenpaar und einer linearen Gleichung eine weitere lineare Gleichung abgeleitet. Auch hierfür wird eine Gleichung zweiten Grades gelöst<sup>6</sup>.

$$(m, n)$$

$$c = ax + by$$

$$\rightarrow g_{1,2} = e_{1,2}x + f_{1,2}y$$

Die Grundfaltung (H5) ermöglicht das Legen einer Tangente durch einen gegebenen Punkt an eine Parabel. Dies entspricht der Konstruktion einer linearen Gleichung aus zwei Koordinatenpaaren und einer linearen Gleichung.

---

<sup>6</sup> Man erinnere sich daran, wie in der Schule mit Zirkel und Lineal eine Lotgerade konstruiert wurde.

$$\begin{aligned}
 & (m, n) \\
 & (u, v) \\
 & c = ax + by \\
 \rightarrow & g_{1,2} = e_{1,2}x + f_{1,2}y
 \end{aligned}$$

Diese Faltoperation löst ebenfalls eine quadratische Gleichung. Man betrachte dazu folgende Situation:

Gegeben seien eine Parabel (s. Abbildung 21) mit der Gleichung

$$p_0 : x^2 = 2cy \quad [11, \text{S. 25}]$$

(wobei  $c$  der Parameter der Parabel ist) und der Punkt  $P_0(u, v)$ .

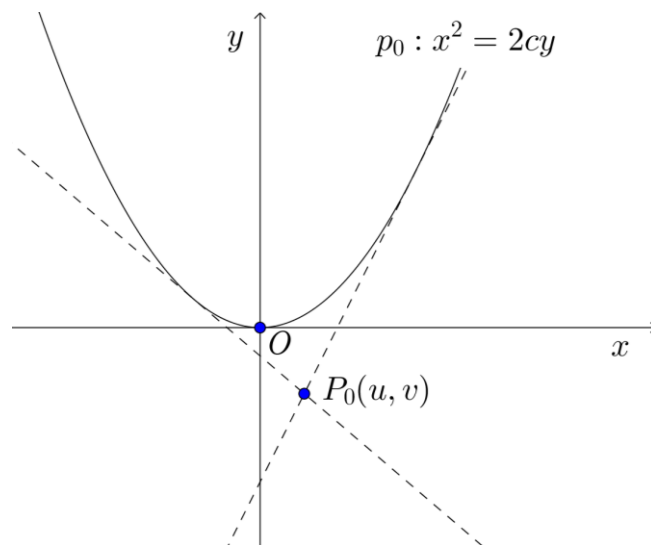


Abbildung 21: Parabel mit der Gleichung  $p_0 : x^2 = 2cy$

Die Gerade, die durch den Punkt  $P_0$  geht, habe die Steigung  $k$ . Sie kann durch die Gleichung

$$y = k(x - u) + v$$

beschrieben werden.

Wenn diese Gerade Tangente der Parabel  $p_0$  sein soll, dann hat die Gleichung

$$x^2 = 2c(k(x - u) + v)$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 2ckx + 2cuk - 2cv$$

nur eine Lösung. Die Diskriminante muss Null sein, folglich ist

$$0 = (ck)^2 - 2cku + 2cv$$

$$\Leftrightarrow 0 = k^2 - \frac{2u}{c} \cdot k + \frac{2v}{c}.$$

Die Steigungen der Tangente der Parabel  $p_0$  durch den Punkt  $P_0$  sind Lösungen einer quadratischen Gleichung. Damit ist gezeigt, dass die fünfte Grundfaltung tatsächlich quadratische Gleichungen lösen kann.

Die Grundfaltung (H6) besagt, dass an zwei Parabeln gemeinsame Tangenten gelegt werden können. Es wird also aus zwei Koordinatenpaaren und zwei linearen Geraden eine lineare Gleichung konstruiert, was dem Lösen einer Gleichung bis zum vierten Grad entspricht. Allerdings gibt es nur Konstellationen, in denen die Grundfaltung drei mögliche Resultate liefert.

$$(u, v)$$

$$c = ax + by$$

$$g = ex + fy$$

$$\rightarrow j_{1,2,3,4} = h_{1,2,3,4}x + i_{1,2,3,4}y$$

Um zu zeigen, dass diese Grundfaltung tatsächlich kubische Probleme lösen kann, betrachten wir die zwei Parabeln (Abbildung 22) mit den Gleichungen

$$p_1 : (y - n)^2 = 2a(x - m) \quad \text{und} \quad p_2 : x^2 = 2by \quad [11, \text{S. 30ff.}]$$

Die Gleichung, die eine mögliche Tangente der beiden Parabeln beschreibt, sei

$$t : y = kx + d.$$

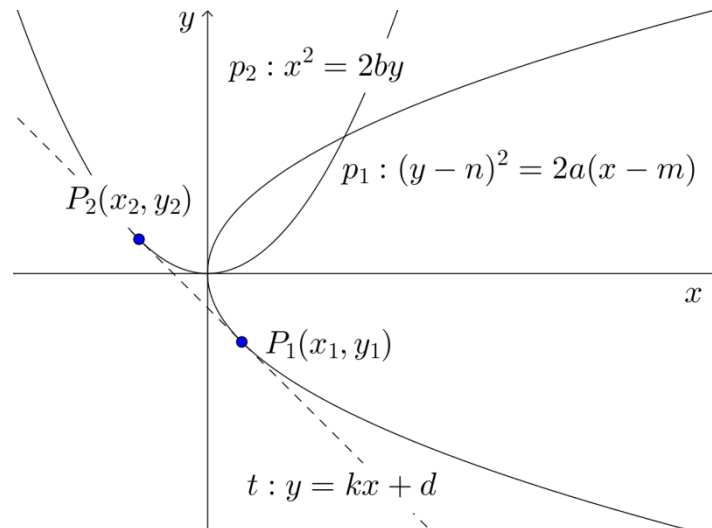


Abbildung 22: Parabel  $p_1$  und Parabel  $p_2$  (nach [11]), In der Zeichnung ist  $m = n = 0$

Wir nehmen nun an, dass der Punkt  $P_1(x_1, y_1)$  der Punkt ist, in dem  $t$   $p_1$  tangiert. Dann wird  $t$  auch durch die Gleichung

$$(y - n)(y_1 - n) = a(x - m) + a(x_1 - m)$$

repräsentiert, also

$$y = \frac{a}{y_1 - n} \cdot x + n + \frac{ax_1 - 2am}{y_1 - n}.$$

Folglich ist  $k = \frac{a}{y_1 - n}$  und  $d = n + \frac{ax_1 - 2am}{y_1 - n}$ .

Es ergibt sich, dass  $y_1 = \frac{a+nk}{k}$  und  $x_1 = \frac{d-n}{k} + 2m$  und durch Einsetzen in die Parabelgleichung

$$\left(\frac{a+nk}{k} - n\right)^2 = 2a\left(\frac{d-n}{k} + 2m - m\right)$$

$$\frac{a^2}{k^2} = 2a\left(\frac{d-n}{k} + m\right)$$

$$\Rightarrow a = 2k(d - n + km).$$

Ebenso sei  $P_2(x_2, y_2)$  der Punkt, in dem  $t$   $p_2$  tangiert.

Dann kann  $t$  auch durch die Gleichung

$$xx_2 = by + by_2$$

bzw.

$$y = \frac{x_2}{b} \cdot x - y_2$$

dargestellt werden.

Deshalb ist  $k = \frac{x_2}{b}$  und  $d = -y_2$ .

Dies führt zu  $x_2 = bk$  und  $y_2 = d$  und durch Einsetzen in die Parabelgleichung

$$b^2k^2 = -2bd$$

$$d = -\frac{bk^2}{2}.$$

Indem wir nun für  $d$  substituieren, erhalten wir

$$a = 2k \left( -\frac{bk^2}{2} - n - km \right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = bk^3 - 2mk^2 + 2nk + a$$

$$\Leftrightarrow 0 = k^3 - \frac{2m}{b}k^2 + \frac{2n}{b}k + \frac{a}{b}.$$

Demnach ist die Steigung der gemeinsamen Tangente eine Lösung  $k$  der kubischen Gleichung

$$k^3 - \frac{2m}{b}k^2 + \frac{2n}{b}k + \frac{a}{b} = 0.$$

Bekanntlich kann eine Gleichung dritten Grades entweder eine reelle Lösung und zwei komplexe Lösungen haben, oder drei reelle Lösungen, von denen zwei oder alle drei gleich sein können. Im ersten Fall entspricht das der Situation, in der sich die Parabeln schneiden. Im zweiten Fall tun sie es nicht. Zwei Lösungen sind genau dann gleich, wenn die Tangenten gleich sind, wenn sich die Parabeln also tangieren. Alle drei Tangenten sind genau dann gleich, wenn die Parabeln Kontakt dritter Ordnung haben [11, S. 30].

Bei der letzten Grundfaltung (*H7*) steht die *Faltgerade* normal auf eine gegebene Gerade  $l_2$  und entspricht der Tangente der Parabel mit Brennpunkt  $P$  und Leitlinie  $l_1$ . In die Sprache der Algebra übersetzt bedeutet dies, dass aus einem Koordinatenpaar und zwei linearen Gleichungen eine weitere lineare Gleichung konstruiert wird, was dem Lösen einer quadratischen Gleichung entspricht.

$$\begin{aligned}
 & (m, n) \\
 & c = ax + by \\
 & g = ex + fy \\
 \rightarrow & j_{1,2} = h_{1,2}x + i_{1,2}y
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich für Origamics, dass aus Koordinatenpaaren und linearen Gleichungen lineare Gleichungen konstruiert werden können. Des Weiteren lassen sich aus allgemeinen Gleichungen bis zum Grad zwei Koordinatenpaare oder lineare Gleichungen ableiten und damit Gleichungen bis zum Grad vier lösen.

Ein Vergleich mit den zuvor gewonnenen Ergebnissen für die euklidische Geometrie zeigt auf, dass die euklidische Geometrie Gleichungen bis zum Grad zwei konstruieren kann, wohingegen durch Papierfaltung nur lineare Gleichungen aufgestellt werden können. Andererseits können mit den Methoden des Papierfaltens höhergradige Gleichungen und somit „schwierigere“ Probleme gelöst werden.

### 6.3 Euklid auf Origamics zurückführen

Aus dem vorherigen Abschnitt geht hervor, dass das Axiomensystem der japanischen Papierfaltkunst mächtiger ist, als das der euklidischen Geometrie. Es muss daher möglich sein, alle elementaren euklidischen Operationen ( $E1$ ) bis ( $E5$ ) durch Kombinationen der Grundfaltungen ( $Hi$ ) zu ersetzen. Tatsächlich zeigt Geretschläger [11], wie die euklidischen Operationen durch reines Falten ausgeführt werden können.

#### 6.3.1 ( $E1$ ) auf Origamics zurückführen

Das Axiom ( $E1$ ) ist ident mit der Grundfaltung ( $H1$ ).

#### 6.3.2 ( $E2$ ) auf Origamics zurückführen

Mit den Methoden des Papierfaltens können Kreise nicht auf die gleiche Weise „gezeichnet“ werden, wie mit dem Zirkel. Beim Ausführen von ( $E2$ ) erhält man die (unendliche) Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt  $M$  den konstanten Abstand  $r$  haben. Bei den Resultaten der Grundfaltungen ( $Hi$ ) handelt es sich entweder um eine oder mehrere Fallgeraden oder um einzelne Punkte als Schnittobjekte von Fallgeraden. Da bei jedem Faltungsvorgang eine endliche Anzahl an Punkten erzeugt wird, ist es nicht möglich, eine unendlich große Menge an Punkten - also in unserem Fall die unendlich große Menge der Punkte eines Kreises - zu falten.

Trotzdem kann ein Kreis ausreichend bestimmt werden, weil jede beliebige Anzahl an Punkten und Tangenten eines Kreises gefaltet werden kann. Dabei wird wie folgt vorgegangen (s. Abbildung 23):

- a) Sind der Mittelpunkt  $M$  und der Radius  $r = AB$  eines Kreises bekannt, so kann mittels ( $H2$ )  $A$  auf  $M$  gefaltet werden. Bei diesem Faltungsvorgang wird  $B$  auf den Punkt  $B'$  gefaltet. Man erhält  $r = MB'$ .
- b) Ist eine Strecke  $l$  durch  $M$  gegeben, so kann mittels ( $H3$ ) der Radius  $r = MB'$  auf diese Gerade gefaltet werden (die Fallgerade ist die Winkelhalbierende von  $\angle MB', l$ ). Dies führt zum Punkt  $P$ , einem Punkt des Kreises, der auf dem Durchmesser  $l$  liegt. Durch die andere Winkelhalbierende erhält man den gegenüberliegenden Punkt.
- c) Schließlich konstruiert man durch das Falten von  $l$  auf sich selbst und durch  $P$  mittels ( $H4$ ) die senkrechte Gerade auf den Durchmesser, die  $P$  enthält. Dies entspricht der Tangente des Kreises im Punkt  $P$ .

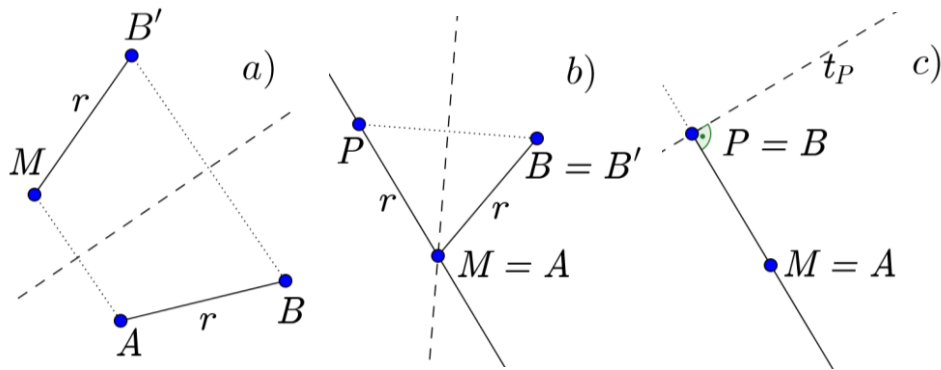


Abbildung 23: Konstruktion eines Kreises mit Origami (nach [11])

Die Menge der Punkte bzw. der Tangenten eines Kreises lässt sich zwar nicht zur Gänze bestimmen, doch können auf eben beschriebene Weise alle Punkte und Tangenten jedes beliebigen Kreises einzeln konstruiert werden.

### 6.3.3 (E3) auf Origamics zurückführen

Axiom (E3) besagt, dass man den Schnittpunkt zweier nicht-paralleler Geraden ermitteln kann. Dies ist ident mit unserer Forderung, dass der Schnittpunkt zweier Faltgeraden konstruiert werden kann, um so erste Punkte zu erhalten.

### 6.3.4 (E4) auf Origamics zurückführen

Um Axiom (E4) mit den Methoden der Papierfaltung zu erhalten, muss man zeigen, dass der Schnittpunkt eines Kreises mit einer Geraden bestimmt werden kann, deren Abstand zum Mittelpunkt nicht größer als der Radius ist.

Hat man einen Kreis mit Mittelpunkt  $M$ , einen Punkt  $P$ , der auf der Kreislinie liegt, und eine Gerade  $l$  gegeben, so ermittelt man diese Schnittpunkte (in Abbildung 24  $S$  bzw.  $P'$ ) durch das Falten von  $P$  auf  $l$ , wobei  $M$  auf der Faltkante zu liegen kommt. Die Grundfaltung, die diesen Schritt gewährleistet ist (H5).

Damit können die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden ermittelt werden, indem die Tangenten an einer speziellen Parabel  $p$  mit Brennpunkt  $P$  und Leitlinie  $l$ , wobei  $M$  auf dieser Tangente liegt, bestimmt werden.

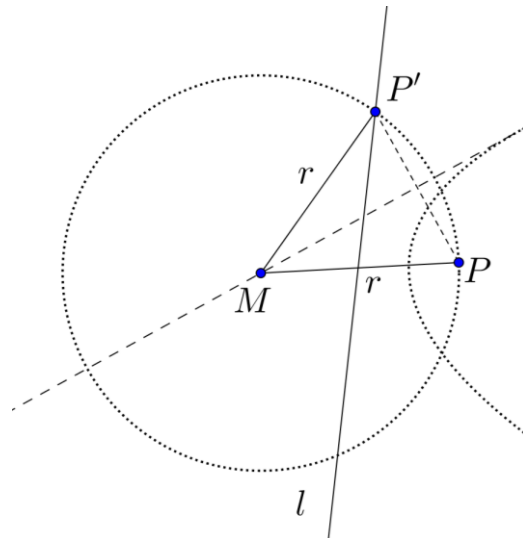


Abbildung 24: Konstruktion des Schnittpunktes eines Kreises mit einer Geraden (nach [11])

### 6.3.5 (E5) auf Origami zurückführen

Wie bereits festgestellt, lassen sich Kreise nur über bestimmte Punkte und Tangenten konstruieren. Es ist daher einleuchtend, dass die Schnittpunkte zweier Kreise ebenfalls nicht auf direktem Wege gefunden werden können. Indem man aber die gemeinsame Kreissehne der beiden, sich schneidenden, Kreise konstruiert, reduziert sich das Problem auf das Finden der Schnittpunkte der gemeinsamen Kreissehne mit den jeweiligen Kreisen und somit auf Axiom (E4). Diese Vorgehensweise soll an dieser Stelle genauer untersucht werden.

Gegeben seien zwei Kreise, deren Schnittpunkte es zu bestimmen gilt (s. Abbildung 25). Der Mittelpunkt des einen Kreises liege im Koordinatenursprung und habe den Radius  $c$ . Der Mittelpunkt des anderen Kreises sei  $(a, 0)$  und sein Radius sei  $b$ . Damit ergeben sich die beiden Kreisgleichungen  $x^2 + y^2 = c^2$  und  $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ .

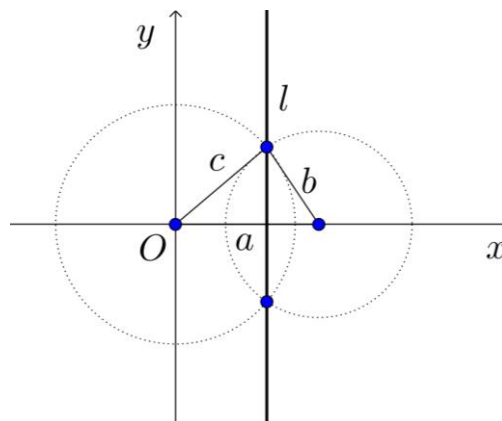


Abbildung 25: Konstruktion der Schnittpunkte zweier Kreise mit Origami (nach [11])

Daraus erhält man die gemeinsame Sehne als Gerade  $l$  mit der Geradengleichung

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - c^2 &= (x - a)^2 + y^2 - b^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - c^2 &= x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - b^2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.\end{aligned}$$

Die Schnittpunkte der beiden Kreise liegen deshalb auf der Geraden  $l$ , die normal auf die Verbindungsgerade der beiden Mittelpunkte liegt. Dabei ist der Abstand vom Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius  $c$  zur Geraden  $\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$ .<sup>7</sup>

Diese Gerade lässt sich durch mehrfache Anwendung der Grundfaltungen ( $H2$ ), ( $H3$ ) und ( $H4$ ) auf die gegebenen Strecken  $a$  und  $c$  konstruieren<sup>8</sup>, weshalb nur noch der Schnittpunkt der beiden Kreise mit der Geraden bestimmt werden muss. Wie dieser letzte Schritt möglich ist, wurde soeben besprochen (s. 6.3.4).

Somit ist gezeigt, dass jede Konstruktion, die mit den klassischen Euklidischen Methoden erzeugt wird, auch mit Origamics angefertigt werden kann. Insbesondere lassen sich alle Operationen ( $E1$ ) bis ( $E5$ ) durch Kombinationen der Grundfaltungen ( $Hi$ ) ersetzen.

---

<sup>7</sup> Gleichmaßen kann man sich leicht überlegen, dass der Abstand vom Mittelpunkt des anderen Kreises zur Geraden  $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$  ist.

<sup>8</sup> Eine Faltanleitung hierfür befindet sich im Anhang.

## 6.4 Origamics auf Euklid zurückführen

Wir wissen nun, wie die euklidischen Operationen ( $E_i$ ) gefaltet werden können. In diesem Abschnitt drehen wir den Spieß um und zeigen, dass alle Grundfaltungen ( $H_i$ ) durch Kombinationen von ( $E1$ ) bis ( $E5$ ) erhalten werden können. Da uns bereits bekannt ist, dass die Grundfaltung ( $H6$ ) Konstruktionen ermöglicht, die mit den euklidischen Methoden nicht realisierbar sind, erwarten wir nicht, diese mit Zirkel und Lineal imitieren zu können und lassen sie deshalb auch aus.

### 6.4.1 Identische Operationen

Wie bereits festgestellt, ist Grundfaltung ( $H1$ ) ident mit ( $E1$ ). Außerdem entspricht unsere Regel, die das Erzeugen von Punkten als Schnittpunkte von Faltkanten sichert, der Operation ( $E3$ ).

### 6.4.2 Die Grundfaltungen ( $H2$ ), ( $H3$ ) und ( $H4$ )

Die Grundfaltung ( $H2$ ) entspricht der Konstruktion der Mittelsenkrechten, ( $H3$ ) liefert entweder die Winkelhalbierende oder die Mittelparallele und ( $H4$ ) die Lotgerade. Alle diese Konstruktionen lassen sich problemlos mit dem Zirkel und dem Lineal ausführen.

### 6.4.3 ( $H5$ ) und ( $H7$ ) auf Euklid zurückführen

Es gilt noch zu zeigen, dass die Konstruktion der Tangente(n) einer Parabel mit Brennpunkt  $P$  und Leitlinie  $l$  durch einen vorgegebenen Punkt  $Q$  ( $H5$ ) oder normal auf eine gegebene Gerade  $q$  ( $H7$ ) mit den klassischen euklidischen Methoden möglich ist. Doch zunächst sollen einige Eigenschaften der Parabel wiederholt werden (vgl. auch S. 19).

Eine Parabel ist die Menge aller Punkte, deren Abstand zum Brennpunkt  $P$  gleich dem Abstand zur Leitlinie  $l$  ist. Für einen speziellen Punkt  $X$  der Parabel gilt  $XP = Xl$ . Die Achse  $a$  der Parabel steht normal auf die Leitlinie  $l$  und der Punkt  $P$  liegt auf  $a$ . Ist  $P'$  der Schnittpunkt der parallelen Geraden zu  $a$  durch  $X$  mit der Geraden  $l$ , so gilt offensichtlich:  $XP' = Xl = XP$ . Die Streckensymmetrale von  $PP'$  ist die Tangente der Parabel im Punkt  $X$ . Demnach haben alle Punkte der Tangente denselben Abstand von  $P$  und  $P'$ .

Nun wollen wir an einen Punkt  $Q \notin p(P, l)$  eine Tangente der Parabel  $p$  legen. Der Abbildung 26 a) entnehmen wir, dass die Tangente  $t \ni Q$  die Streckensymmetrale von  $PP'$  ist, somit ist  $Q$  von  $P$  und  $P'$  gleich weit entfernt.

Schlägt man also den Kreis um  $Q$  durch den Punkt  $P$ , so erhält man die beiden Punkte  $P'$ . Mit dem Zirkel lässt sich dann die Streckensymmetrale der Strecke  $PP'$  konstruieren. Als Schnittpunkte der Streckensymmetralen mit den entsprechenden Geraden, die parallel zur Achse  $a$  und durch die entsprechenden Punkt  $P'$  verlaufen, erhält man die beiden Punkte  $X$ . Damit wäre das Resultat von ( $H5$ ) mit Zirkel und Lineal konstruiert.

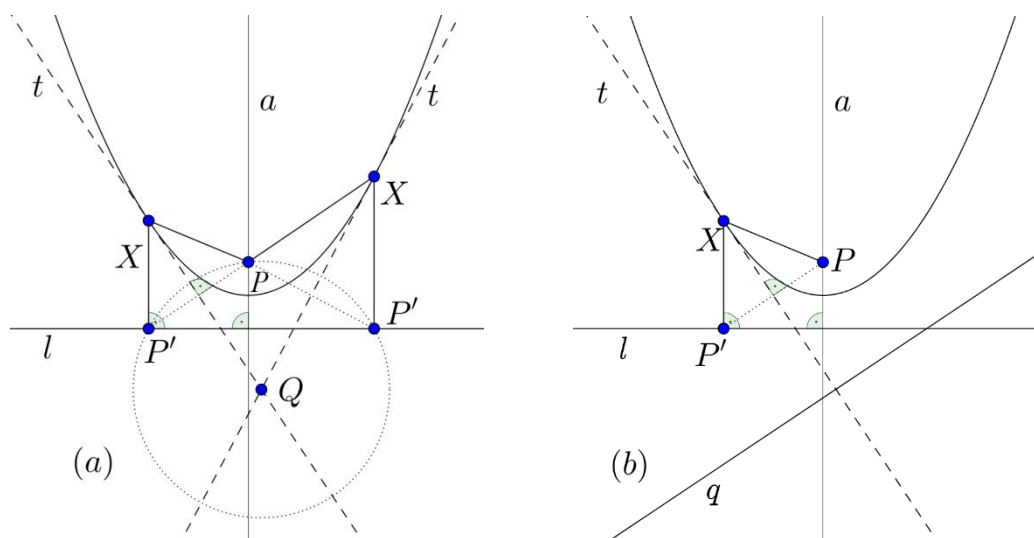


Abbildung 26: Konstruktion der Tangente an eine Parabel mit Zirkel u. Lineal (nach [11])

Wir schließen dieses Kapitel mit der Konstruktion von (H7) ab. Unser Ziel ist es, die Tangente der Parabel zu bestimmen, die normal auf eine gegebene Gerade  $q$  steht, wobei  $q \nparallel l$  ist (Abbildung 26 b). Wie bereits bekannt, steht  $PP'$  normal zur gesuchten Tangente und somit  $PP' \parallel q$ . Deshalb erhält man den Punkt  $P'$  als Schnittpunkt der Geraden  $l$  mit der Geraden, die parallel zu  $q$  liegt und durch den Punkt  $P$  verläuft. Die Konstruktion der Streckensymmetrale der Strecke  $PP'$  ergibt dann die gesuchte Tangente.

Da sich auch diese letzte Grundfaltung geometrisch mit Zirkel und Lineal imitieren lässt, gilt Folgendes: Jede Konstruktion, die mit den Operationen (H1) bis (H7) und ohne (H6) konstruierbar ist, ist es auch mit den euklidischen Werkzeugen.

Zusammen mit den Ergebnissen des vorherigen Abschnittes bedeutet dies, dass alle geometrischen Konstruktionen, die mit den Grundfaltungen (H1) bis (H7) und ohne (H6) erzeugt werden können, auch mit den euklidischen Operationen (Ei) erzeugt werden können, und umgekehrt. Folglich sind diese beiden Axiomensysteme äquivalent. Die Grundfaltung (H6) erweitert die Konstruktionsmöglichkeiten beider Systeme. Deshalb ist die Menge der Konstruktionen mit den euklidischen Methoden eine echte Teilmenge der Menge der Konstruktionen mit den Methoden des Papierfaltens.

## 7 Anwendungsmöglichkeiten von Origami

In dieser Arbeit wurde bis jetzt der Aufbau des Systems von Origamics, wie es von den Huzita-Hatori-Axiomen definiert ist, untersucht. Es wurden alle möglichen Grundfaltungen aufgelistet und deren geometrische und algebraische Bedeutung besprochen. Ein Vergleich mit dem - uns vertrauteren - System der euklidischen Geometrie hat aufgezeigt, dass nicht nur alle Konstruktionen mit Zirkel und Lineal imitiert werden können, sondern darüber hinaus auch neue Konstruktionen möglich sind. Nach einem also sehr theoretischen Teil, ist es an der Zeit, für die praktische Umsetzung. In diesem Abschnitt wollen wir uns Methoden zur Lösung linearer, quadratischer und kubischer Gleichungen erarbeiten. Außerdem möchten wir die mittels Papierfalten konstruierbaren Punkte charakterisieren und Lösungen zu den drei klassischen Problemen der Antike vorstellen. Schließlich soll die Stärke des Systems noch für weitere Aufgabenstellungen genutzt werden.

### 7.1 Geometrische Elementarkonstruktionen

In der Schule haben wir gelernt, wie mit Zirkel und Lineal gewisse Konstruktionen realisiert werden können, die als Bausteine in komplexeren Konstruktionen immer wieder auftauchen. Diese Elementaren Konstruktionen waren für uns:

- 1) Das Halbieren einer Strecke
- 2) Das Halbieren eines Winkels
- 3) Das Fällen des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade
- 4) Das Konstruieren der Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb der Geraden
- 5) Das Konstruieren der Parallelen zu einer Geraden im vorgegebenen Abstand
- 6) Das Abtragen einer Strecke auf einen Strahl

Mit unserem erworbenen Wissen ist es für uns keine Überraschung, dass sich alle diese Konstruktionen mit Origamics ebenfalls realisieren lassen.

- 1) 2) 3) Die ersten drei Konstruktionen entsprechen der Konstruktion der Mittelsenkrechten, der Winkelhalbierenden und der Lotgeraden und damit den Elementaren Grundfaltungen  $(H2)$ ,  $(H3)$  und  $(H4)$ .
- 4) Die Konstruktion der Parallelen zu einer gegebenen Geraden  $l$  durch einen vorgegebenen Punkt  $P$  kann in nur zwei Faltvorgängen realisiert werden: Zunächst konstruieren wir die Lotgerade  $\Delta_1$  auf  $l$  durch den Punkt  $P$  mit  $(H4)$ . Danach erzeugen wir abermals mit  $(H4)$  die Lotgerade  $\Delta_2$  auf  $\Delta_1$  durch den Punkt  $P$  (siehe Abbildung 27)

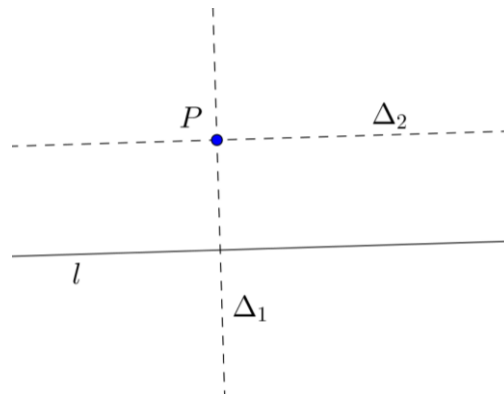


Abbildung 27: Konstruktion der Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt

- 6) Wir behandeln zuerst das Abtragen einer vorgegebenen Länge (gegeben durch eine Strecke  $AB$ ) auf einen Strahl. Für diese Konstruktion sind acht Faltungsvorgänge notwendig.

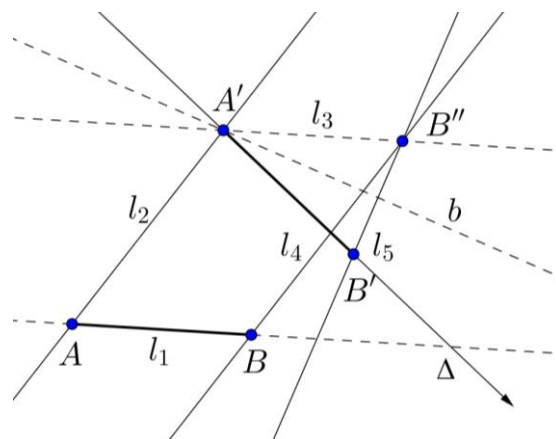


Abbildung 28: Abtragen einer Strecke auf einen Strahl mit Origami

Betrachten wir Abbildung 28, in der  $AB$  auf den Strahl  $\Delta$  mit Anfangspunkt  $A'$  abgetragen werden soll. Zunächst konstruieren wir mit (H1) die Geraden  $l_1 = AB$  und  $l_2 = AA'$ . Dann bilden wir - wie in 4) besprochen - die Parallele  $l_3$  durch den Punkt  $A'$  und die Parallele  $l_4$  durch den Punkt  $B$ . Der Schnittpunkt der beiden Geraden  $l_3$  und  $l_4$  ist  $B''$ . Nun konstruieren wir mit (H3) die Winkelhalbierende  $b$  des Strahles  $AB$  und der Geraden  $l_3$  (jene der beiden Winkelhalbierenden, die uns bezüglich der vorgegebenen Richtung interessiert). Als letzten Schritt falten wir die Normale  $l_5$  auf  $b$  durch den Punkt  $B''$  mittels der Grundfaltung (H4). Der Schnittpunkt  $B' = \Delta \cap l_5$  ist der gesuchte Endpunkt, da  $AB = A'B'' = A'B'$  [26].

- 5) Mit Hilfe der Elementaren Konstruktion 6) lässt sich dann gemäß der Konstruktion 4) die Parallele zu einer Geraden im vorgegebenen Abstand konstruieren.

## 7.2 Lösen linearer Gleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir die Strecken bestimmen, deren Längen Lösungen der Gleichung

$$ax = b$$

sind, wobei  $a$  und  $b$  vorgegebene Längen sind und  $a \neq 0$  ist. Dies entspricht natürlich der Ermittlung der Strecken der Länge  $\frac{b}{a}$ .

Eine sehr einfache Methode [11], diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal zu lösen, nützt die Eigenschaft ähnlicher Dreiecke aus. Sie lässt sich ebenso mit Origamics durchführen (s. Abbildung 29).

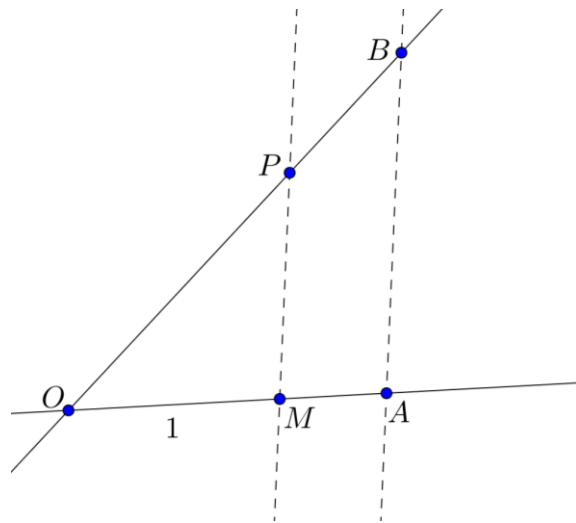


Abbildung 29: Konstruktion von Brüchen mit Origami

Wir betrachten das Dreieck  $\Delta OAB$  mit den Seiten  $OA = a$  und  $OB = b$ .<sup>9</sup>  $M$  sei der Punkt auf  $OA$ , dessen Abstand zu  $O$  die Einheitslänge 1 hat. Nun bestimmen wir  $MP$  parallel zu  $AB$  und  $P \in OB$ .

Da die Dreiecke  $\Delta OMP$  und  $\Delta OAB$  ähnlich zueinander sind, gilt nach dem Strahlensatz

<sup>9</sup> Wir gehen davon aus, dass  $a$  und  $b$  positiv sind. Ist dies nicht der Fall, so nimmt man einfach deren Absolutbetrag.

$$OB : OA = OP : OM$$

$$\Leftrightarrow OB : OA = OP : 1$$

und somit

$$OP = \frac{b}{a}.$$

Wollen wir also die Lösung  $x$  der linearen Gleichung  $ax = b$  bestimmen, so wählen wir zunächst einen Punkt  $O$  und konstruieren zwei Geraden, die durch diesen Punkt gehen. Danach tragen wir die Strecken  $1$ ,  $a$  und  $b$  vom Punkt  $O$  gemäß der Abbildung 29 ab und verbinden mittels (H1) die beiden Endpunkte miteinander. Als letzten Schritt konstruieren wir eine parallele Gerade zu der letzten Faltkante durch den Endpunkt der Strecke der Länge  $1$  und erhalten so den Quotienten  $\frac{b}{a}$ .

Die Multiplikation funktioniert ähnlich mit analoger Begründung (s. [26]).

### 7.3 Lösen allgemeiner quadratischer Gleichungen

Wie bereits bewiesen, ermöglicht die fünfte Grundfaltung das Lösen quadratischer Gleichungen. Die Steigungen der entstandenen Faltgeraden sind nämlich Lösungen einer quadratischen Gleichung.

Für eine Parabel gegeben durch  $p_0 : x^2 = 2cy$  und einen Punkt  $P_0(u, v)$ , hängen diese Lösungen von den Koeffizienten  $c, u$  und  $v$  ab:

$$k^2 - \frac{2u}{c} \cdot k + \frac{2v}{c} = 0,$$

wobei hier  $k$  für eine Steigung der Tangente der Parabel durch den Punkt  $P_0(u, v)$  steht [11].

Die Frage, die sich uns stellt, ist, wie  $c, u$  und  $v$  gewählt werden müssen, damit die Steigungen der Tangenten eine quadratische Gleichung der Form  $x^2 + px + q = 0$  bei vorgegebenem  $p$  und  $q$  lösen<sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup> Zur Bestimmung der Lösungen einer quadratische Gleichung der Form  $ax^2 + bx + c = 0$ , wird die Gleichung zunächst normiert. Die Division lässt sich - wie soeben gesehen - ebenfalls mittels Papierfalten durchführen.

In der Sprache der Faltungen ausgedrückt bedeutet das, die Koordinaten jenes Punktes (Brennpunktes) und jener Geraden (Leitlinie) zu bestimmen, die - nach Falten des Punktes auf Punkte der Geraden - durch  $P_0$  verlaufenden Fallgeraden liefern, deren Steigungen die quadratische Gleichung lösen.

Wählen wir

$$c = 2, u = -p \text{ und } v = q,$$

so erhalten wir die Parabelgleichung

$$p_0 : x^2 = 4y$$

mit dem Brennpunkt  $F(0,1)$  und der Leitlinie  $l : y = -1$ .

Falten wir  $F = (0,1)$  auf die Gerade  $l : y = -1$  derart, dass die Faltkanten durch den Punkt  $P_0 = (-p, q)$  verlaufen, so sind die Steigungen der Faltkanten die Lösungen der Gleichung.

### 7.3.1 Ein Beispiel

Das Verfahren wollen wir gleich an einem Beispiel testen. Die zu lösende Gleichung sei

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Als erstes falten wir einen rechten Winkel in die Mitte des Blatt Papiers, um die beiden Koordinatenachsen zu erhalten. Theoretisch könnten wir an dieser Stelle ein genaues Koordinatengitter konstruieren<sup>11</sup>.

Nach dem obigen Verfahren hat der Punkt  $P_0$  die Koordinaten  $(-4, -5)$ . Wir markieren diesen Punkt, sowie den Punkt  $F = (0,1)$ . Danach falten wir die Gerade  $l : y = -1$ . Es gibt nun zwei Möglichkeiten, den Punkt  $F$  auf  $l$  zu falten. Wir erhalten daher zwei Fallgeraden mit den Gleichungen  $f_1 : y = -5x - 25$  und  $f_2 : y = x - 1$ .

Um schließlich die Steigung der beiden Faltkanten zu bestimmen, konstruieren wir jeweils das Steigungsdreieck. Ausgehend von einem beliebigen Punkt auf der Fallgerade, falten wir die Einheitslänge parallel zur  $x$ -Achse. Danach falten wir den rechten Winkel des Dreiecks und erhalten als zweite Kathete die Strecke, deren Länge die eine Lösungen der Gleichung ist. Die eine Fallgerade hat die Steigung  $k = 1$  und die andere Gerade hat die Steigung  $k = -5$ . Dies sind die beiden gesuchten Lösungen.

---

<sup>11</sup> In Abschnitt 7.8 werden wir sehen, wie die Seitenränder eines quadratischen Blatt Papiers in Verhältnisse gefaltet werden können. Für dieses Beispiel (und auch für alle weiteren Aufgaben, die noch folgen werden) reicht es, die zu den Achsen parallelen Faltkanten mit freiem Auge zu konstruieren.

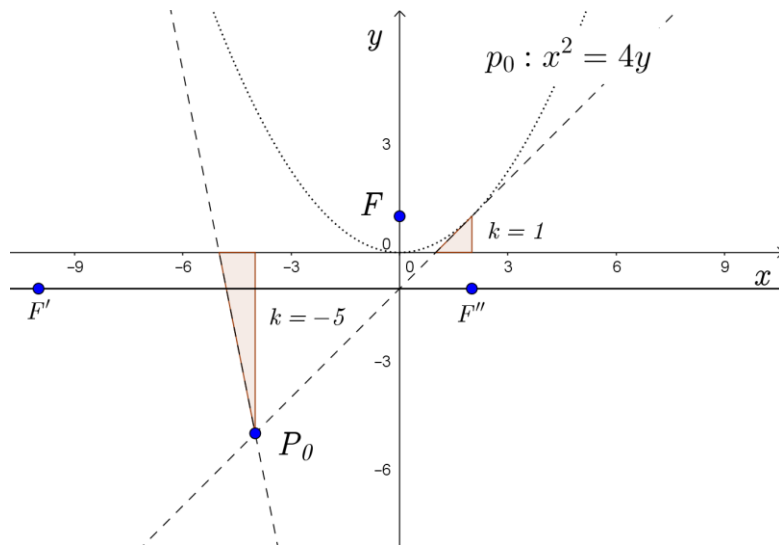


Abbildung 30: Lösen der Gleichung  $x^2 + 4x - 5 = 0$  mit Origami

### 7.3.2 Falten der Quadratwurzel

Wir wissen nun, wie die Lösungen einer allgemeinen quadratischen Gleichung gefaltet werden können. Für die Konstruktion der Quadratwurzel einer beliebigen Länge kann natürlich das gleiche Verfahren (mit  $p = 0$ ) verwendet werden. Die Steigungen  $k$  der Tangenten hängen dann vom Parameter  $c$  der Parabel und der  $y$ -Koordinate  $v$  des Punktes  $Q$  ab:

$$k = \sqrt[2]{-\frac{2v}{c}}$$

Ist eine Zahl  $x = \frac{a}{b}$  gegeben, dann können wir  $\sqrt[2]{x}$  folgendermaßen falten:

Als ersten Schritt falten wir die beiden Parallelen zur  $y$ -Achse im Abstand von  $b/2$  und erhalten somit die Leitlinie  $l$  und den Brennpunkt  $F$  als Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse. Danach falten wir die Parallele zur  $y$ -Achse im Abstand von  $a/2$  nach unten (oder nach oben, wenn wir  $F$  und  $l$  so konstruiert haben, dass die Parabel nach unten geöffnet ist). Als Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse erhalten wir den Punkt  $Q$ . Bleibt uns nur noch den Punkt  $F$  auf  $l$  zu falten und zwar so, dass die Faltkante durch  $Q$  verläuft.

Die Steigung der beiden Faltkanten ermitteln wir schließlich durch die Konstruktion des Steigungsdreiecks.

### 7.3.3 Falten der Quadratwurzel unter Verwendung des Höhensatzes

Wenn wir uns zurückerinnern, wie wir in der Schule die Quadratwurzel aus einer vorgegebenen Strecke mit Zirkel und Lineal konstruiert haben, finden wir noch eine weitere Methode. Die Konstruktion der Quadratwurzel wird diesmal mit dem Höhensatz begründet:

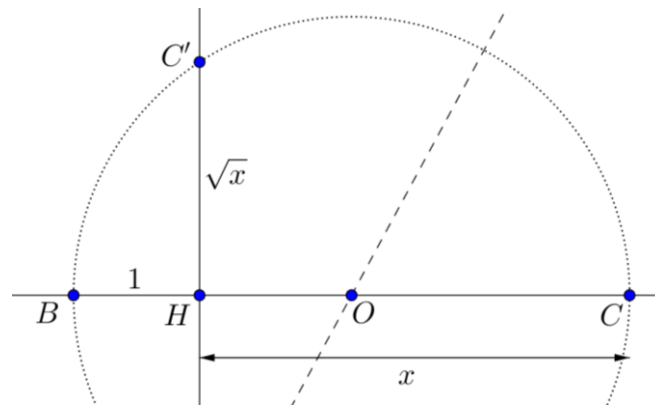


Abbildung 31: Konstruktion der Quadratwurzel

Zunächst konstruieren wir  $BH = 1$  und  $HC = x$ . Dann ermitteln wir den Mittelpunkt  $O$  der Strecke  $BC$  mit (H2) und die Normale auf  $BC$  durch den Punkt  $H$  mit (H4). Schließlich falten wir  $C$  mit (H5) auf die soeben erzeugte Normale durch den Punkt  $O$ . Den neuen Punkt bezeichnen wir mit  $C'$ . Da das Dreieck  $BCC'$  in  $C'$  rechtwinklig ist folgt mit dem Höhensatz  $HC' = \sqrt{x}$ .

### 7.4 Lösen allgemeiner kubischer Gleichungen

Weitaus spannender als das Lösen quadratischer Gleichungen, ist das Lösen kubischer Gleichungen mit einem Blatt Papier. Hierfür wollen wir ebenfalls ein Verfahren [11] herleiten.

Aus Abschnitt 6.2 (S. 34) ist bekannt, dass die Steigung der gemeinsamen Tangente an zwei Parabeln mit den Gleichungen  $p_1 : (y - n)^2 = 2a(x - m)$  und  $p_2 : x^2 = 2by$  eine Lösung  $k$  der kubischen Gleichung

$$k^3 - \frac{2m}{b}k^2 + \frac{2n}{b}k + \frac{a}{b} = 0$$

ist.

Um die Lösungen einer allgemeinen kubischen Gleichung zu erhalten, reicht es deshalb aus, jene Ausgangskonstellation zu finden, die nach Ausführung der Faltopeation (H6) die Faltgeraden mit der entsprechenden Gleichung liefert.

Bekanntlich kann eine kubische Gleichung durch die Gleichung

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad (*)$$

mit reellen Zahlen  $p, q$  und  $r$  dargestellt werden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe der Parameter  $b$  der Parabel  $p_2$  die Einheitslänge 1. Dann ist

$$p = -2m, \quad q = 2n, \quad r = a$$

oder

$$m = -\frac{p}{2}, \quad n = \frac{q}{2}, \quad a = r.$$

Damit kann die Gleichung (\*) auch als

$$k^3 - \frac{2m}{b}k^2 + \frac{2n}{b}k + \frac{a}{b} = 0$$

geschrieben werden.

Einsetzen der Werte  $m, n$  und  $a$  in die Parabelgleichungen liefert die Brennpunkte und die Leitlinien.

Der Brennpunkt  $F_1$  der Parabel  $p_1$  ist gegeben durch

$$F_1 = \left(-\frac{p}{2} + \frac{r}{2}, \frac{q}{2}\right)$$

und die Leitlinie  $l_1$  durch die Gleichung

$$x = -\frac{p}{2} - \frac{r}{2}.$$

Der Brennpunkt  $F_2$  der Parabel  $p_2$  hat die Koordinaten

$$F_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

und die Leitlinie  $l_2$  ist repräsentiert durch die Gleichung

$$y = -\frac{1}{2}.$$

Das simultane Falten des Brennpunktes  $F_1$  auf die Leitlinie  $l_1$  und des Brennpunktes  $F_2$  auf die Leitlinie  $l_2$  mittels der elementaren Operation (H6) führt zur gemeinsamen Tangente (oder zu den gemeinsamen Tangenten) der Parabeln  $p_1$  und  $p_2$ , deren Steigungen die gegebene kubische Gleichung lösen.

Die Lösung  $k$  einer vorgegebene Gleichung dritten Grades mit konstruierbaren reellen Zahlen  $p, q$  und  $r$  ist also die Steigung der gemeinsamen Tangente der Parabeln

$$p_1 \left( \left( -\frac{p}{2} + \frac{r}{2}, \frac{q}{2} \right); x = -\frac{p}{2} - \frac{r}{2} \right)$$

und

$$p_2 \left( \left( 0, \frac{1}{2} \right); y = -\frac{1}{2} \right)$$

### 7.4.1 Ein Beispiel

Die Funktionsweise des Verfahrens wollen wir erneut an einem Beispiel illustrieren. Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Durch Ablesen der Parameter sehen wir, dass  $p = -3$ ,  $q = 3$  und  $r = -1$ .

Folglich sind die beiden Punkte  $F_1 = \left( 1, \frac{3}{2} \right)$  und  $F_2 = \left( 0, \frac{1}{2} \right)$ . Für die beiden Geraden ergeben sich die Gleichungen  $l_1 : x = 2$  und  $l_2 : y = -\frac{1}{2}$

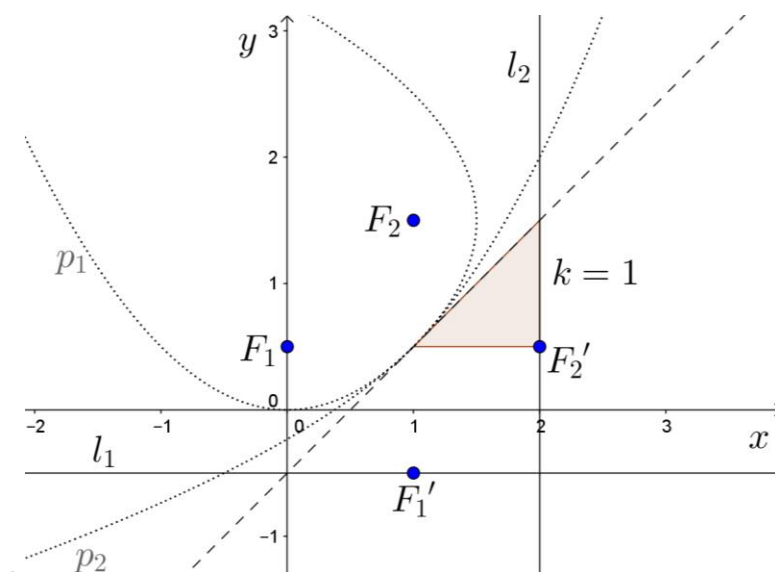


Abbildung 32: Lösen der Gleichung  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$  mit Origami

### 7.4.2 Falten der Kubikwurzel

Ein Lösungsverfahren zur Ermittlung der Lösungen einer allgemeinen kubischen Gleichung, ist damit gezeigt. Wollen wir (als Spezialfall davon) die Kubikwurzel einer beliebigen Länge konstruieren, so können wir gleichermaßen vorgehen. Da sich die allgemeine kubische Gleichung  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  auf eine Gleichung der Form  $x^3 + r = 0$  reduziert, sind die Parameter  $p$  und  $q$  Null. Nach obiger Methode hängt die Steigung der gemeinsamen Tangente nur mehr von den Parametern  $a$  und  $b$  der beiden Parabeln ab und ist die negative Kubikwurzel des Quotienten  $\frac{a}{b}$ .

Damit müsste durch Bestimmung der Brennpunkte und Leitlinien der Parabeln mit den Gleichungen

$$p_1 : y^2 = 2ax \quad \text{und} \quad p_2 : x^2 = 2by \quad [11]$$

nach Ausführen von Grundfaltung (H6) die Steigung tatsächlich  $-\sqrt[3]{a/b}$  ergeben<sup>12</sup>.

Der Beweis ist gleich zu führen, wie im allgemeinen Fall und sei deshalb nur grob skizziert:

Da sich die beiden Parabeln  $p_1$  und  $p_2$  in zwei Punkten mit reellen Koordinaten schneiden, besitzen sie nur eine reelle Tangente  $t : y = cx + d$ . Ist  $P_1(x_1, y_1)$  der Berührungspunkt von  $t$  mit  $p_1$ , so kann  $t$  auch durch die Gleichung

$$yy_1 = ax + ax_1 \Leftrightarrow y = \frac{a}{y_1} \cdot x + \frac{ax_1}{y_1}$$

beschrieben werden.

Mit  $y_1 = \frac{a}{c}$  und  $x_1 = \frac{d}{c}$  erhält man durch Einsetzen in die Parabelgleichung

$$\frac{a^2}{c^2} = 2a \cdot \frac{d}{c}$$

$$a = 2cd.$$

Ist  $P_2(x_2, y_2)$  der Berührungspunkt von  $t$  mit  $p_2$ , so hat  $t$  auch die Gleichung

$$y = \frac{x_2}{b} \cdot x - y_2,$$

---

<sup>12</sup> Der aufmerksamen Leserschaft fällt auf, dass wir uns hier im Kreis drehen. Aus der hergeleiteten kubischen Gleichung  $k^3 - \frac{2m}{b}k^2 + \frac{2n}{b}k + \frac{a}{b} = 0$ , deren Lösungen die Steigungen der gemeinsamen Tangente an zwei speziellen Parabeln sind, haben wir eine Faltnleitung zur Lösung allgemeiner kubischer Gleichung formuliert. Dieser Faltnleitung wenden wir für den Spezialfall  $p = 0 \wedge q = 0$  an und zeigen dann den Zusammenhang mit den Steigungen der gemeinsamen Tangenten.

weshalb man durch Einsetzen von  $x_2 = bc$  und  $y_2 = d$  in die zweite Parabelgleichung

$$d = -\frac{bc^2}{2}$$

erhält.

Substitution für  $d$  liefert dann

$$a = -bc^3$$
$$\Rightarrow c = -\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

■

Sind  $a$  und  $b$  gegeben, so lässt sich  $\sqrt[3]{a/b}$  nun leicht wie folgt konstruieren: Zunächst faltet man einen rechten Winkel, der die beiden Achsen der Parabeln darstellt. Indem man  $a/2$  auf die linke und die rechte Seite des Ursprunges faltet, erhält man jeweils die Leitgerade  $l_1$  und den Brennpunkt  $F_1$  der Parabel  $p_1$ . Ebenso liefert das Falten von  $b/2$  nach oben und nach unten die Leitgerade  $l_2$  und den Brennpunkt  $F_2$  der Parabel  $p_2$ . Falten man nun gleichzeitig  $F_1$  auf  $l_1$  und  $F_2$  auf  $l_2$ , so ist  $-\sqrt[3]{a/b}$  die Steigung der erzeugten Faltgerade. Die Strecke mit der Länge  $\sqrt[3]{a/b}$  erhält man als letzten Schritt nach Konstruktion des Steigungsdreiecks.

Abschließend sei bemerkt, dass quartische Gleichungen theoretisch auch mit den Methoden des Papierfaltens lösbar sind, da sie auf Gleichungen geringeren Grades zurückgeführt werden können. Verfahren dazu wirken allerdings etwas künstlich und schwerfällig [33]. In Geretschläger [11] findet man eine Anleitung, mit der Lösungen einer quartischen Gleichungen konstruiert werden können.

## 7.5 Charakterisierung der konstruierbaren Punkte

Liegt eine Einschränkung auf ein bestimmtes geometrisches Werkzeug vor, so ist die Charakterisierung der damit konstruierbaren Zahlen für Mathematiker und Mathematikerinnen besonders interessant. Im Fall von Origamics setze man sich intensiver mit der Frage der Konstruierbarkeit auseinander, als die sechste Grundfaltung entdeckt wurde.

Für eine konstruktive Herleitung eines Satzes über die Konstruierbarkeit, müssten wir tiefer in die Körpertheorie eintauchen, als es für diese Arbeit gewinnbringend wäre. Stattdessen gehen wir von einer Formulierung aus und beschränken uns auf eine Beweisskizze und Überlegungen. Der Hauptsatz über die Konstruierbarkeit der Origamics-Zahlen lautet:

*Ein Punkt  $P$  ist genau dann mit Origami konstruierbar, ausgehend von einer Punktmenge  $A$ , wenn es eine Körperkette  $K_0 < K_1 < K_2 \dots < K_n$  gibt, sodass  $K_0$  aus den Koordinaten der Elemente aus  $A$  besteht,  $K_n$  die Koordinaten von  $P$  enthält und für alle  $i = 0, \dots, s-1$   $[K_i : K_{i-1}] \leq 3$  [33].*

### **Beweisskizze (vgl. [33])**

Zunächst vergegenwärtigen wir uns, dass die gegebene Punktmenge aus zumindest zwei Punkten bestehen muss, da nur so eine erste Gerade gefaltet werden kann. Für gewöhnlich wird die Zeichenebene mit  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{C}$  identifiziert und daher im Koordinatenursprung „gestartet“. Eine günstige Menge  $A$  ist zum Beispiel  $\{(0, 0), (1, 0)\}$ .

Sei nun  $P$  konstruierbar. Dann erhalten wir  $P$  aus der Menge  $A$  durch sukzessive Anwendung der erlaubten Grundkonstruktionen  $(H_i)$ . In arithmetischen Operationen gedacht sind dessen Koordinaten durch Addition, Subtraktion, Division, Multiplikation, sowie durch Lösen quadratischer und kubischer Gleichungen aus bereits existierender Punkte entstanden<sup>13</sup>. Im  $i$ -ten Schritt der Konstruktion betrachten wir den Körper  $K_i$ , der alle Koordinaten der geometrischen Objekte enthält, die bis zu diesem Zeitpunkt aufgetaucht sind. Nun werden im  $i+1$ -ten Schritt neue geometrische Objekte erzeugt, deren Koordinaten durch die Verwendung der soeben aufgelisteten Operationen auf Elemente von  $K_i$  entstehen. In jedem Fall gehören diese zu einem Körper  $K_{i+1}$ , der ein Erweiterungskörper von  $K_i$  vom Grad  $\leq 3$  ist. Damit wäre die Hinrichtung gezeigt.

Umgekehrt wissen wir, dass jede Körpererweiterung  $[K_i : K_{i-1}] \leq 3$  durch Hinzufügen der Wurzel einer Polynomgleichungen vom Grad  $\leq 3$  entsteht. Da wir gesehen haben, dass wir solche Wurzeln per Papierfalten konstruieren können, impliziert eine Körperkette  $K_0 < K_1 < K_2 \dots < K_n$  eine dazugehörige Menge an Operationen, mit der  $P$  erzeugt wird. ■

---

<sup>13</sup> Die Addition und die Subtraktion haben wir als einzige algebraische Operationen nicht behandelt, wir erkennen aber rasch, wie diese auszuführen sind.

## 7.6 Die klassischen Probleme der Antike

Aus der griechischen Antike sind folgende geometrischen Konstruktionsprobleme überliefert:

### **Problem 1** (*Verdopplung eines Würfels*).

Zu einem gegebenen Würfel soll die Seitenlänge des Würfels mit doppeltem Volumen konstruiert werden.

### **Problem 2** (*Drittteilung eines Winkels*).

Zu einem gegebenen Winkel soll ein Drittel dieses Winkels konstruiert werden.

### **Problem 3** (*Quadratur des Kreises*).

Zu einem gegebenen Kreis soll ein flächengleiches Quadrat konstruiert werden.

Diese drei Probleme regten für mehr als 2000 Jahre die mathematische Forschung an. Sie wurden immer wieder auch von mathematischen Laien aufgegriffen, die davon überzeugt waren, dass sie - nach genügend langer Suche - auf die Lösung stoßen und damit Berühmtheit erlangen würden. Tatsächlich konnten die *drei klassischen Probleme der Antike* erst im 19. Jahrhundert (u.a. mit Hilfe von Galois) endgültig als unlösbar beantwortet werden (vgl. [17]).

Wie wir heute wissen, sind mit Zirkel und Lineal nur diejenigen Zahlen konstruierbar, die in einer Körpererweiterung  $K$  von  $\mathbb{Q}$  liegen mit  $[K : \mathbb{Q}] = 2^n$ , wobei  $K$  und  $\mathbb{Q}$  durch eine Kette quadratischer Körpererweiterungen verbunden sind. Vereinfacht formuliert sind es Zahlen, die sich durch Ausdrücke mit Quadratwurzeln darstellen lassen. Euklidische Konstruktionen vermögen demnach nicht, kubische Gleichungen zu lösen. Origami Konstruktionen hingegen schon, weshalb es für die ersten beiden Probleme Lösungsversuche gibt.

### 7.6.1 Würfelverdoppelung

Die Würfelverdoppelung (auch *Delische's Problem* genannt) geht auf die Sage zurück, wonach das Orakel von Delos den Einwohnern prophezeit haben soll, dass sie die damals wütende Pest stoppen könnten, wenn sie den würfelförmigen Altar im Tempel des Apollon im Volumen verdoppeln würden [16].

Für die antiken griechischen Mathematiker bedeutete dies, die Kantenlänge eines Würfels so zu bestimmen, dass dessen Rauminhalt das Doppelte des Volumens eines Würfels mit vorgegebener Kantenlänge ausmacht.

Bei einem Ausgangswürfel mit Einheits-Kantenlänge 1, lief für sie das Problem darauf hinaus, die Strecke der Länge  $\sqrt[3]{2}$  nur mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

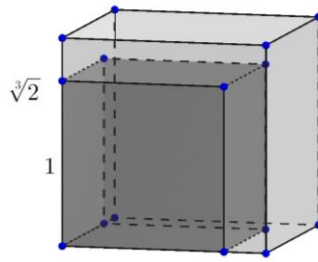


Abbildung 33: Verdoppelung des Einheitswürfels

Die in Abschnitt 7.4. 2 dargestellte Methode von Geretschläger liefert uns mit  $a = 2b$  rasch die gewünschte Zahl.

Wir wollen uns noch zwei weitere schöne Methoden anschauen, die schon etwas älter sind und entdeckt wurden, als die Axiomatisierung noch in den Kinderschuhen steckte.

### 7.6.1.1 Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ nach Beloch

Wie bereits erwähnt, erkannte die Italienerin Margharita P. Beloch als erste, dass Papierfalt-Konstruktionen kubische Gleichungen lösen können. Die sechste Grundfaltung wird nach ihr auch oft *Belochfaltung* genannt.

In ihrem 1936 erschienenen Artikel [7] findet man auch eine Methode, die Kubikwurzel aus zwei zu falten. Sie wird von Hull in [21] beschrieben.

Für die Konstruktion benötigt Beloch eine Hilfskonstruktion, die Hull ihr zu Ehren das Beloch-Quadrat nennt:

Given two points  $A$  and  $B$  and two lines  $r$  and  $s$  in the plane, construct a square  $WXYZ$  with two adjacent corners  $X$  and  $Y$  lying on  $r$  and  $s$ , respectively, and the sides  $WX$  and  $YZ$ , or their extensions, passing through  $A$  and  $B$ , respectively.  
[21, S. 308]

Das zu konstruierende Quadrat hat die Eigenschaft, dass die zwei gegenüberliegenden Ecken  $X$  und  $Y$  auf den zwei gegebenen Geraden  $r$  and  $s$  liegen. Außerdem sollen die Seiten  $WX$  und  $YZ$  (bzw. deren Verlängerungen) durch die beiden gegebenen Punkte  $A$  und  $B$  verlaufen. Abbildung 34 zeigt ein solches Quadrat:

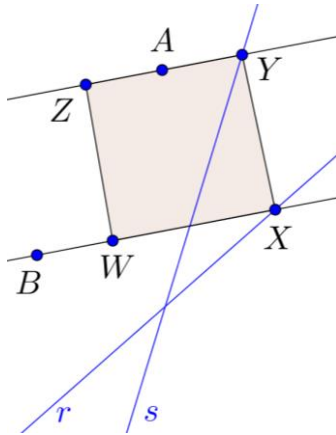


Abbildung 34: Ein Beloch-Quadrat

Der erste Schritt der Konstruktion besteht darin, eine zu  $s$  parallele Gerade  $s'$  derart zu falten, dass  $d(s, s') = d(s, A)$  gilt (s. Abbildung 35). Dies entspricht der 5. Eemenateren geometrischen Konstruktion aus 7.1. Dazu werden folgende Grundfaltungen benötigt: Mittels (H4) kann das Lot  $l$  von  $A$  auf  $s$  gefaltet werden. Der Schnittpunkt von  $l$  und  $s$  sei  $P$ . Nun kann eine Faltkante durch  $P$  erzeugt werden, sodass man einen weiteren Punkt  $\tilde{A} \in l$  erhält. Es gilt offensichtlich  $d(s, s') = d(s, \tilde{A})$ . Um schließlich  $s'$  zu erhalten, konstruiert man mittels (H4) eine orthogonale Faltkante durch den Punkt  $\tilde{A}$ .

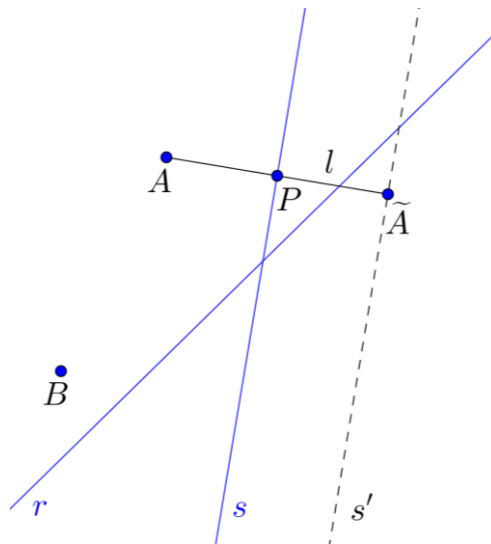


Abbildung 35: Erste Konstruktionsschritte des Beloch-Quadrats (nach [21])

Auf die gleiche Art lässt sich eine zu  $r$  parallele Gerade  $r'$  konstruieren, deren Abstand zu  $r$  dem Abstand  $d(r, B)$  entspricht. An dieser Stelle der Konstruktion wird die Belochfaltung benötigt. Man konstruiert eine Faltkante  $q$ , die  $A$  mit einem Punkt  $A' \in s'$  zur Deckung bringt und  $B$  mit einem Punkt  $B' \in r'$  (s. Abbildung 36). Sei  $Y$  der Mittelpunkt der Strecke  $AA'$  und  $X$  der Mittelpunkt der Strecke  $BB'$ . Nach Konstruktion von  $A'$  ist  $q$  sowohl Mittellot der Punkte

$A$  und  $A'$ , als auch Mittellot der Punkte  $B$  und  $B'$  und damit  $X \in q$  und  $Y \in q$ . Nach Konstruktion von  $r'$  und  $s'$  gilt außerdem  $X \in r$  und  $Y \in s$ . Daraus folgt, dass  $X$  der Schnittpunkt der Geraden  $q$  und  $r$  ist und  $Y$  der Schnittpunkt der Geraden  $q$  und  $s$ . Die Strecke  $XY$  ist die eine Seite des Beloch-Quadrates. Da  $AX$  und  $BY$  normal auf  $XY$  stehen, liegen  $A$  und  $B$  auf den gegenüberliegenden Seiten (bzw. Seitenverlängerungen). Damit erfüllt das Quadrat  $WXYZ$  die Bedingungen. Die Konstruktion der beiden anderen Eckpunkte ist eine einfache Aufgabe.

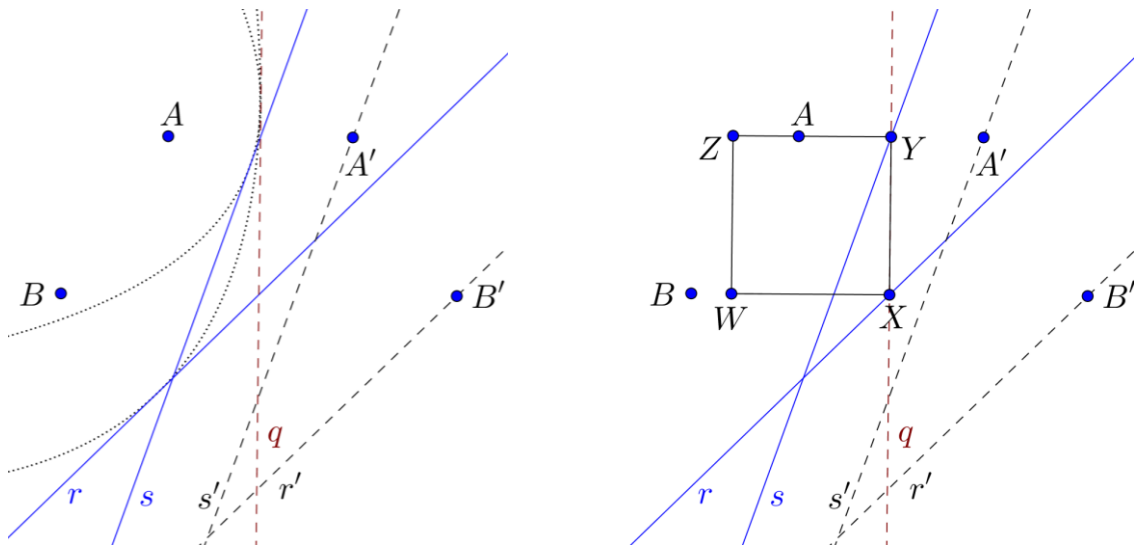


Abbildung 36: Konstruktion des Beloch-Quadrats (nach [21])

Nun bedienen wir uns des Beloch-Quadrats, um  $\sqrt[3]{2}$  zu erhalten.

Dazu setzen wir das Beloch-Quadrat in ein Koordinatensystem. Wir wählen für  $r$  die  $y$ -Achse und für  $s$  die  $x$ -Achse der Ebene. Der Punkt  $A$  hat die Koordinaten  $(-1,0)$  und der Punkt  $B$  die Koordinaten  $(0,-2)$ . Nun konstruieren wir die beiden parallelen Geraden:  $r'$  ist die Gerade mit der Geradengleichung  $x = 1$  und  $s'$  ist die Gerade mit der Geradengleichung  $y = 2$ . Danach falten wir gleichzeitig  $A$  auf  $r'$  und  $B$  auf  $s'$ . Der Faltungsvorgang erzeugt eine Faltgerade, die  $r$  im Punkt  $X$  und  $s$  im Punkt  $Y$  schneidet. Über die neu gewonnenen Punkte  $X$  und  $Y$  können wir das Quadrat  $WXYZ$  errichten.

Aus der Abbildung 37 entnehmen wir, dass die Dreiecke  $\triangle OAX$ ,  $\triangle OXY$  und  $\triangle OYB$  ähnlich zueinander sind. Deshalb gilt

$$|OX| : |OA| = |OY| : |OX| = |OB| : |OY|.$$

Mit  $|OA| = 1$  und  $|OB| = 2$  erhalten wir

$$|OX| = |OY| : |OX| = 2 : |OY|.$$

Folglich ist

$$|OX|^3 = \frac{|OY|}{|OX|} |OX| \frac{2}{|OY|} = 2,$$

der Punkt  $X$  hat also die Koordinaten  $(0, \sqrt[3]{2})$ .

■

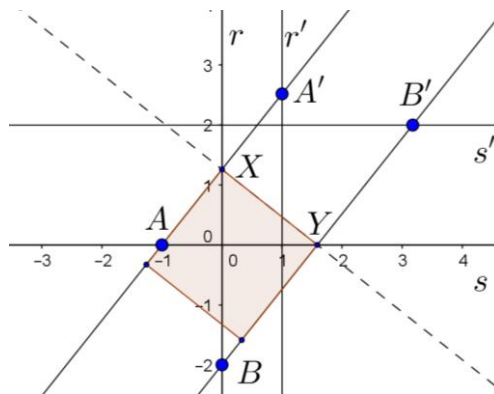


Abbildung 37: Belochs Origami-Konstruktion von  $\sqrt[3]{2}$  (nach [21])

Wie wir bereits wissen, sind viele Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen [5, 6, 11] auf Belochs wichtige Arbeit nicht eingegangen. Fast fünfzig Jahre später führte G. E. Martin [29, S. 156f.] unabhängig davon den gleichen Beweis mit  $B = (0, -k)$  und  $X = (0, \sqrt[3]{k})$ .

### 7.6.1.2 Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ nach Messer

Im Jahr 1986 entdeckte Peter Messer eine ähnliche Art  $\sqrt[3]{2}$  zu falten (für die Faltanleitungen s. [11, 28]).

Der Ausgangspunkt der Konstruktion ist ein quadratisches Blatt Papier, welches in drei gleich große Rechtecke unterteilt wird<sup>14</sup>. Die Eckpunkte des Quadrates werden gemäß der Abbildung 37 mit  $A, B, C$  und  $D$  beschriftet und die Eckpunkte der zwei parallel liegenden Faltkanten mit  $E, F$  und  $G, H$ . Aus dem mittleren und rechten Bild entnehmen wir, dass durch die Beloch-Faltung  $C$  auf einen Punkt  $\bar{C}$  auf  $AB$  gelegt wird, und gleichzeitig  $H$  auf einen Punkt  $\bar{H}$  auf  $EF$  zu liegen kommt (Abbildung 38).

Die Behauptung ist nun, dass  $\bar{C}$  die linke Papierkante in zwei Abschnitte unterteilt, deren Längen im Verhältnis  $\sqrt[3]{2}$  zueinander stehen.

<sup>14</sup> Dies ist per Papierfalten möglich (s. Abschnitt 7.8.3).

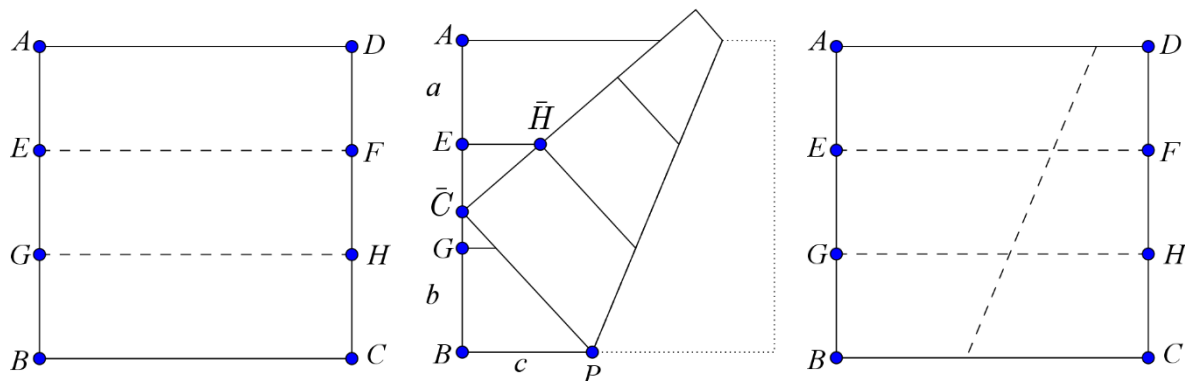


Abbildung 38: Messers Origami-Konstruktion von  $\sqrt[3]{2}$

**Beweis (nach [11]).**

Die Strecken  $A\bar{C}$  und  $\bar{C}B$  haben die Längen  $a$  und  $b$  und das Quadrat demnach die Seitenlänge  $a + b$ . Es gilt zu zeigen, dass  $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$ . Der Endpunkt der Faltkante auf  $BC$  sei  $P$  und die Länge der Strecke  $BP$  sei  $c$ .

Da

$$P\bar{C} = PC$$

erhalten wir

$$P\bar{C} = (a + b) - c.$$

Es ist  $\triangle BPC$  rechtwinkelig und somit

$$b^2 + c^2 = (a + b - c)^2$$

bzw.

$$0 = a^2 + 2ab - 2(a + b)c$$

und deshalb

$$c = \frac{a^2 + 2ab}{2(a + b)}.$$

Die Dreiecke  $\triangle B\bar{P}\bar{C}$  und  $\triangle E\bar{C}\bar{H}$  sind ähnlich zueinander, weil sie in zwei Winkel übereinstimmen.

Es ist nämlich

$$\angle \bar{C}BP = \angle \bar{H}E\bar{C} = 90^\circ$$

und

$$\begin{aligned} \angle \bar{C}PB &= 180^\circ - \angle \bar{C}BP - \angle \bar{B}\bar{C}P \\ &= 90^\circ - \angle \bar{B}\bar{C}P \\ &= 90^\circ - (180^\circ - \angle E\bar{C}\bar{H} - \angle \bar{H}\bar{C}P) \\ &= \angle E\bar{H}\bar{C}. \end{aligned}$$

Im Dreieck  $\triangle E\bar{C}\bar{H}$  gilt

$$\bar{C}\bar{H} = \frac{a+b}{3}$$

und

$$\begin{aligned} E\bar{C} &= a - \frac{a+b}{3} \\ &= \frac{2a-b}{3}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\bar{C}\bar{H}}{E\bar{C}} = \frac{P\bar{C}}{BP}$$

folgt

$$\frac{\frac{a+b}{3}}{\frac{2a-b}{3}} = \frac{(a+b) - c}{\frac{a^2 + 2ab}{2(a+b)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2a-b} = \frac{(a+b) - \frac{a^2 + 2ab}{2(a+b)}}{\frac{a^2 + 2ab}{2(a+b)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2a-b} = \frac{a^2 + 2b^2 + 2ab}{a^2 + 2ab}$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 2a^2b + a^2b + 2ab^2 = 2a^3 + 4a^2b + 4ab^2 - a^2b - 2ab^2 - 2b^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 2b^3.$$

Ziehen wir als letzten Schritt noch die Wurzel erhalten wir

$$a^3 = \sqrt[3]{2} \cdot b,$$

und die Behauptung ist gezeigt. ■

## 7.6.2 Winkeldreiteilung

Ebenso wie die Würfelverdoppelung ist die Winkeldreiteilung eines beliebigen Winkels unter der Verwendung von Zirkel und Lineal, im Allgemeinen<sup>15</sup> nicht möglich. Den Beweis dafür lieferte 1837 Pierre Laurent Wenzel. Er konnte zeigen, dass dies bereits für einen Winkel von 60 Grad unmöglich ist.

Die Grundidee eines Beweises sei kurz skizziert:

Die Konstruktion eines Winkels ist gleichbedeutend mit der Konstruktion des Cosinus dieses Winkels. Soll ein Winkel  $\alpha$  gedrittelt werden, so gilt es die Strecke  $\cos(\alpha/3)$  zu konstruieren. Eine trigonometrische Formel für dreifache Winkel lautet:

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha).$$

Ist die Strecke  $\cos(3\alpha)$  bekannt, so erhält man  $\cos(\alpha)$  durch das Lösen der Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\cos(3\alpha) = 0$$

in der Variablen  $x$ . Da sich mit Zirkel und Lineal keine dritten Wurzeln darstellen lassen, ist eine Konstruktion, die jeden beliebigen Winkel drittelt, unmöglich.

---

<sup>15</sup> Es gibt Winkel, die sich durchaus mit Zirkel und Lineal dreiteilen lassen. So ist beispielsweise ein Winkel von  $\alpha = 135^\circ$  sicher in drei gleich große Teilwinkel zu je  $45^\circ$  teilbar, da der  $45^\circ$ -Winkel mittels Winkelhalbierenden des  $90^\circ$ -Winkels konstruiert werden kann. Auch einen Winkel von  $\alpha = 90^\circ$  kann man dritteln. Es ist nämlich  $90:3 = 30$  und den  $30^\circ$ -Winkel kann man mit Hilfe von Winkelhalbierenden des regelmäßigen Dreiecks konstruieren.

Mittels Origami lässt sich die Lösungen der Gleichung nach Geretschläger [11] jedoch konstruieren, indem die gemeinsamen Tangenten der Parabel  $p_1$  mit dem Brennpunkt

$$F_1 = \left( -\frac{1}{8} \cos(3\alpha), -\frac{3}{8} \right)$$

und der Leitlinien

$$l_1 : x = \frac{1}{8} \cos(3\alpha)$$

und der Parabel  $p_2$  mit dem Brennpunkt

$$F_2 = \left( 0, \frac{1}{2} \right)$$

und der Leitlinie

$$l_2 : y = -\frac{1}{2}$$

ermittelt werden.

Für den  $60^\circ$ -Winkel ist  $\alpha = 20$ , folglich  $F_1 = \left( -\frac{1}{16}, -\frac{3}{8} \right)$  und  $l_1 : x = \frac{1}{16}$ .

Das gleichzeitige Falten von  $F_1$  auf  $l_1$  und von  $F_2$  auf  $l_2$  liefert die Faltkante, deren Steigung den gegebenen Winkel dreiteilt.

Wie auch bei der Würfelverdoppelung, liegen die ersten Konstruktionsversuche der Winkeldreiteilung mittels Origami schon einige Jahre zurück. Bemerkenswert sind hier die Arbeiten des Japaners Abe und des Franzosen Justin.

### 7.6.2.1 Winkeldreiteilung nach Abe

Der Japaner Hisashi Abe [1] entdeckte in den 1970er eine Methode, wie in vier Faltschritten ein beliebiger spitzer Winkel gedrittelt werden kann. Tatsächlich war er damit der erste, dem die Trisektion mittels Papierfalten gelang<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup> Diese Methode wurde später in vielen Arbeiten beschrieben, beispielsweise in [18, 28]. Alperin [3] zeigt auf, dass Abes Art der Winkeldreiteilung sehr ähnlich der Methode ist, in der eine Trisektrix (eine spezielle Kurve mit der das exakte Dritteln eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal möglich ist) verwendet wird.

Ausgangspunkt der Konstruktion ist ein quadratisches Blatt Papier. Die Eckpunkte werden - beginnend mit der linken oberen Ecke und im Uhrzeigersinn - mit  $A, B, C$  und  $D$  bezeichnet (vgl. Abbildung 39).

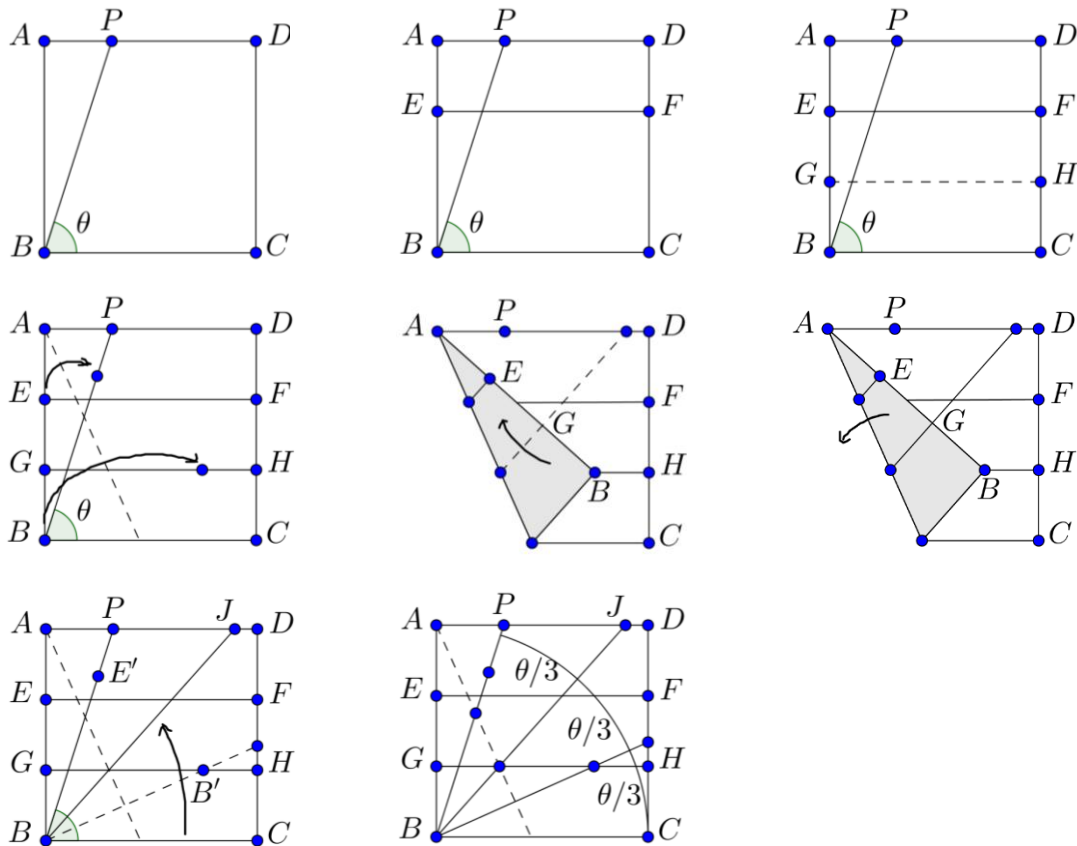


Abbildung 39: Faltaneitung zu Abes Winkeldreiteilung (nach [28])

Danach wird der zu drittelnde Winkel festgelegt, indem der Winkel  $\theta = \angle CBP$  gefaltet wird (Quadrat 1). Im Anschluss wird eine beliebige Parallele  $EF$  zu  $BC$  gefaltet (Quadrat 2) und die Mittelparallele  $GH$  von  $EF$  und  $BC$  (Quadrat 3). An dieser Stelle kommt die Beloch-Faltung ins Spiel. Die Seite  $AB$  wird so umgefaltet, dass  $E$  auf  $BP$  und gleichzeitig  $B$  auf  $GH$  zu liegen kommt (Quadrat 4). Nun werden beide Papierschichten entlang der existierenden Faltkante durch den Punkt  $G$  gefaltet (Quadrat 5)<sup>17</sup>. Danach wird das Papier wieder entfaltet (Quadrat 6).  $B'$  und  $E'$  bezeichnen die Bildpunkte von  $B$  und  $E$ . Im letzten Schritt wird die Seite  $BC$  auf  $BJ$  gefaltet. Der Winkel  $\theta$  ist dreigeteilt durch den Winkel  $\angle CBB'$ .

<sup>17</sup> Die Regel, wonach nur eine Faltung auf einmal erlaubt ist, erfordert das Entfalten des Papiers vor jeder neuen Faltung. Hier wird diese Regel ignoriert, zu Gunsten einer vereinfachten Konstruktion der Winkeldreiteilung. Wollen wir uns streng an die Regel halten, so können wir zunächst das Papier wieder entfalten und die Faltkante  $BJ$  erzeugen, in dem wir eine Faltkante durch den Punkte  $B$  und durch den Schnittpunkt der vorherigen Fatkante mit  $GH$  legen.



Die detaillierte Konstruktionsanleitung zu Justin's Methode befindet sich im Anhang. Wir wollen ein paar Konstruktionsschritte überspringen und mit der Konstruktion in Abbildung 41 starten.

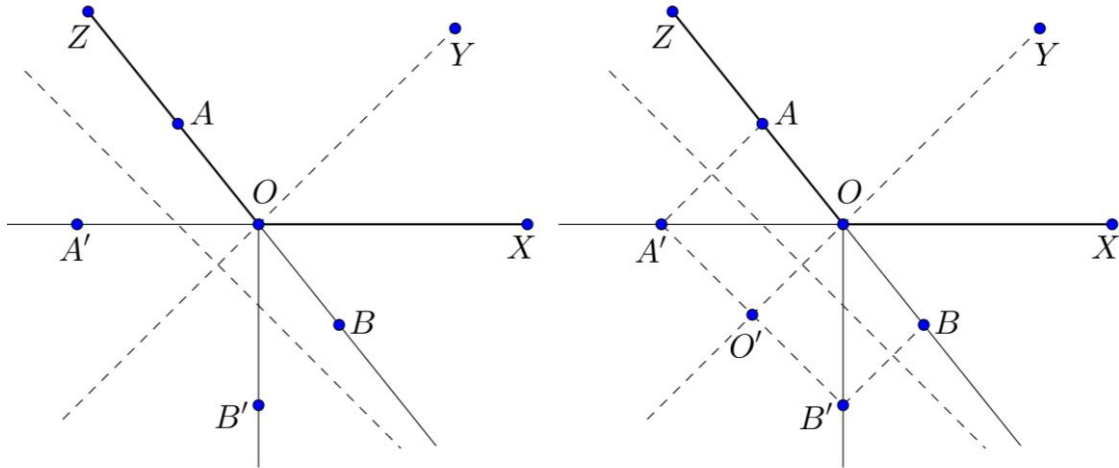


Abbildung 41: Justins Winkeldreiteilung (nach [11])

Wie wir erkennen können, ist der stumpfe Winkel  $\theta = \angle XOZ$  gegeben. Als erstes wählen wir einen Punkt  $A$  auf  $OZ$ , sowie einen Punkt  $B$ , der symmetrisch zu  $A$  auf der Verlängerung von  $OZ$  liegt. Danach falten wir gleichzeitig  $A$  auf die Verlängerung von  $OX$  und  $B$  auf die Normale auf  $OX$ . Der letzte Faltschritt besteht nun darin, eine Normale auf die letzte Faltkante zu falten und zwar derart, dass diese durch  $O$  verläuft. Die entstandene Faltkante  $OY$  dreiteilt den Winkel  $\angle XOZ$ .

### Beweis (nach [11]).

Aus der Abbildung 41 entnehmen wir, dass  $O'$  auch auf der zweiten Faltkante liegt, da  $OO'$  und  $OY$  normal auf die erste Faltkante liegen. Die Strecken  $AA'$  und  $OO'$  stehen normal auf die erste Faltkante, folglich ist  $AA'O'O$  ein Trapez. Da  $A'O'$  und  $AO$  gleich lang sind, handelt es sich um ein gleichschenkeliges Trapez.

Sei  $\beta = \angle XOY$ . Damit ist auch  $\angle A'O'O = \beta$ . Folglich ist

$$\angle A'O'O = \angle AOO' = 180^\circ - \angle ZOY = 180^\circ - (\theta - \beta).$$

Nach Konstruktion sind  $OA$ ,  $OB$ ,  $O'A'$  und  $O'B'$  gleich lang. Sei  $a$  diese Länge. Da das Dreieck  $\triangle A'OB'$  in  $O$  einen rechten Winkel aufweist, ist dessen Umkreismittelpunkt der Mittelpunkt der Hypotenuse  $A'B'$  und der ist genau  $O'$ . Dies bedeutet, dass der Abstand von  $O$  zu  $O'$  gleich dem Abstand von  $O$  zu  $A'$  und von  $O$  zu  $B'$  ist und somit  $a$ . Daraus folgt, dass

die Strecken  $OO'$  und  $A'O'$  gleich lang sind und das Dreieck  $\Delta A'OO'$  ist gleichschenkelig. Folglich ist  $\angle OA'O' = \angle A'OO' = \beta$  und für die Winkel im Dreieck  $\Delta A'OO'$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \angle OA'O' + \angle A'OO' + \angle A'O'O &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow \beta + \beta + 180^\circ - (\theta - \beta) &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow 3 \cdot \beta &= \theta, \end{aligned}$$

der Winkel  $\angle XOY$  drittelt demnach wie behauptet den Winkel  $\angle XOZ$ . ■

### 7.6.3 Quadratur des Kreises

Der Nachweis der Unmöglichkeit mit Zirkel und Lineal zu einem Kreis ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren gelang F. Lindemann (1882) indem er zeigte, dass  $\pi$  transzendent ist.

Derartige Zahlen sind auch mit den Methoden der Papierfaltung nicht konstruierbar. Es gibt zwar Versuche,  $\sqrt{\pi}$  zu konstruieren (vgl. [20]), doch müssen dabei nichtgeradlinige Faltkanten erzeugt werden, die für viele Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen keine zulässige Operation sind [10].

## 7.7 Die Konstruktion regulärer Polygone

Eine weitere klassische Aufgabenstellung, mit der man die Mächtigkeit eines bestimmten geometrischen Werkzeuges bestimmen kann, besteht in der Konstruktion regulärer  $n$ -Ecke. Das kleinste  $n$ , für welches die Griechen keine theoretisch genaue Konstruktion finden konnten, ist 7. Wie auch schon bei der Winkeldrittellung und der Würfelverdoppelung, erfordert die Konstruktion eines regulären Heptagons nämlich das Lösen einer kubischen Gleichung. Heute ist bekannt, dass man mit den euklidischen Werkzeugen nur solche regulären  $n$ -Ecke konstruieren kann, für die  $n = 2^a p_1 p_2 \dots p_k$ , wobei  $p_i$  voneinander verschiedene Fermat Primzahlen (Zahlen der Form  $2^u + 1$ ) sind. Origamics hat eine ähnliche Charakterisierung. Es lassen sich alle  $n$ -Ecke konstruieren, für die  $n > 2$  ist und  $n = 2^a 3^b p_1 p_2 \dots p_k$  mit  $a, b, k \in \mathbb{N}$  und  $p_i$  voneinander verschiedene Pierpont Primzahlen sind (Zahlen der Form  $2^u 3^v + 1$ ) [33].

Damit sind mittels Papierfalten weitaus mehr reguläre  $n$ -Ecke konstruierbar, als mit Zirkel und Lineal. Die unten angeführten Liste [9] enthält die ersten paar Polygone, die mit dem jeweiligen Werkzeug nicht zu konstruieren sind. Es ist  $n = 11$  das kleinste Polygon, welches nicht faltbar ist.

**Zirkel und Lineal:** 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, ...

**Papierfalten:** 11, 22, 23, 25, 29, 31, 33, 41, 43, 44, 46, 47, 49, 50, 53, 55, 58, 59, 61, 62, 66, 67, 69, 71, 75, 77, 79, 82, 83, 86, 87, 88, 89, 92, 93, 94, 98, 99, 100, 101, 103, 106, 107, ...

Es gibt viele Papierfaltkonstruktionen für regelmäßige Polygone. Robert Geretschläger [11] zeigt wie Polygone mit  $n = 2^a$ ,  $n = 3 \cdot 2^a$  und  $n = 5 \cdot 2^a \cdot 3^b$  gefaltet werden können. Außerdem gibt er Faltanleitungen und Erklärungen zu einigen weiteren regulären Polygonen, insbesondere einer recht aufwendigen für das das Heptagon (s. [12]).

### 7.8 Strecken in gleich große Abschnitte unterteilen

Das Falten eines Blatt Papiers in gleich große Teile ist oft der erste Schritt bei Origami-Figuren. Während das Halbieren keine besondere Herausforderung darstellt, verlangt es schon einiges an Fingerspitzengefühl, um einen Brief in perfekte Drittel zu falten. Wie sieht es jedoch mit dem Falten einer Quadratseite in fünf, sieben, acht, dreizehn... gleich großer Teile aus?

Wie so oft, führen mehrere Wege nach Rom. Allein Robert Geretschläger [11] zeigt vier verschiedene Möglichkeiten ein Quadrat zu unterteilen. Die häufigste Methode unter den Nicht-mathematikern und Nicht-mathematikerinnen ist - wegen ihrer Einfachheit - die des japanischen Professors für Biologie Kazuo Haga. Dieser gilt nebenbei bemerkt auch als einer der Pioniere des mathematischen Papierfaltens und prägte den Begriff Origamics.

#### 7.8.1 Satz von Haga

Wir beginnen die Konstruktion mit einem quadratischen Blatt Papier  $ABCD$  (s. Abbildung 42), welches wir derart falten, dass die Ecke  $C$  auf dem Mittelpunkt  $C'$  der Strecke  $AD$  zu liegen kommt (vgl. [31]). Der Satz von Haga sagt nun aus, dass die drei entstandenen Dreiecke (in Abbildung 42 rechts hellgrau) ähnlich zueinander sind und ihre Seiten jeweils im Verhältnis  $5 : 4 : 3$  zueinander stehen. Man sagt dazu auch, dass es sich um pythagoreische Dreiecke handelt.

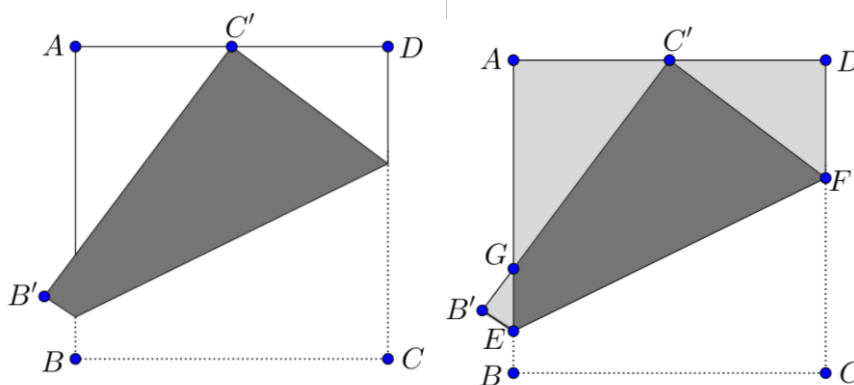


Abbildung 42: Hagas Konstruktion (nach [31])

**Beweis (nach [31]).**

Wir bezeichnen die, durch den Faltungsvorgang entstandene, Faltkante mit  $EF$  und den Schnittpunkt von  $AB$  und  $B'C'$  mit  $G$  (Abbildung 42).

Als Erstes zeigen wir, dass die Dreiecke  $\Delta EBG'$ ,  $\Delta AGC'$  und  $\Delta C'FD$  ähnlich zueinander sind.

Es gilt offensichtlich  $\Delta EBG' \sim \Delta AGC'$ , da die beiden Dreiecke rechtwinkelig sind und  $\angle B'GE$  und  $\angle AGC'$  Scheitelwinkel sind.

Außerdem ist auch  $\Delta AGC' \sim \Delta C'FD$ , weil beide Dreiecke rechtwinkelig sind und  $\angle AGC' = \angle DC'F$ . Letzteres resultiert aus der Tatsache, dass durch den Faltungsvorgang  $\angle GC'F = 90^\circ$  ist, woraus

$$\angle AC'G + \angle DC'F = 90^\circ$$

folgt.

Da außerdem im Dreieck  $\Delta AGC'$

$$\angle C'GA + \angle AC'G = 90^\circ$$

ist, erhalten wir die behauptete Gleichheit.

Bleibt uns nur noch zu zeigen, dass sich die Dreiecksseiten wie  $5 : 4 : 3$  verhalten. Dazu gehen wir vom Einheitsquadrat aus und berechnen die Längen der Dreiecksseiten, die wir gemäß der Abbildung 43 bezeichnen.

Weil  $C'$  der Mittelpunkt der Strecke  $AD$  ist, gilt  $u = y = \frac{1}{2}$ . Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir im Dreieck  $\Delta C'FD$

$$x^2 = y^2 + z^2,$$

also

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + z^2.$$

Da  $x = |BF| = 1 - z$  ist, erhalten wir

$$(1 - z)^2 = \frac{1}{4} + z^2,$$

woraus  $z = \frac{3}{8}$  folgt.

Dies bedeutet

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{25}{64},$$

womit  $x = \frac{5}{8}$  folgt.

Nun erhalten wir bereits die Behauptung, denn es ist

$$x : y : z = \frac{5}{8} : \frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{5}{8} : \frac{4}{8} : \frac{3}{8} = 5 : 4 : 3$$

für das Dreieck  $\Delta C'FD$ .

Aufgrund der Ähnlichkeit zu den anderen zwei Dreiecken gilt für diese selbiges Seitenverhältnis und der Satz von Haga ist bewiesen. ■

Aus diesem Satz lassen sich nun folgende Schlussfolgerungen ziehen:

- Die Strecke  $AG = v$  hat eine Länge von  $\frac{2}{3}$ .

Im Dreieck  $\Delta AGC'$  ist  $u = \frac{1}{2}$  und mit  $w : v : u = 5 : 4 : 3$  ergibt sich  $\frac{1/2}{v} = \frac{3}{4}$ , folglich ist  $v = \frac{2}{3}$  und  $|BG| = \frac{1}{3}$ . Zur Drittelung der Quadratseite  $AB$  müssten wir somit nur noch eine Parallele zu  $AD$  durch den Punkt  $G$ , sowie durch den Mittelpunkt der Strecke  $AG$  legen.

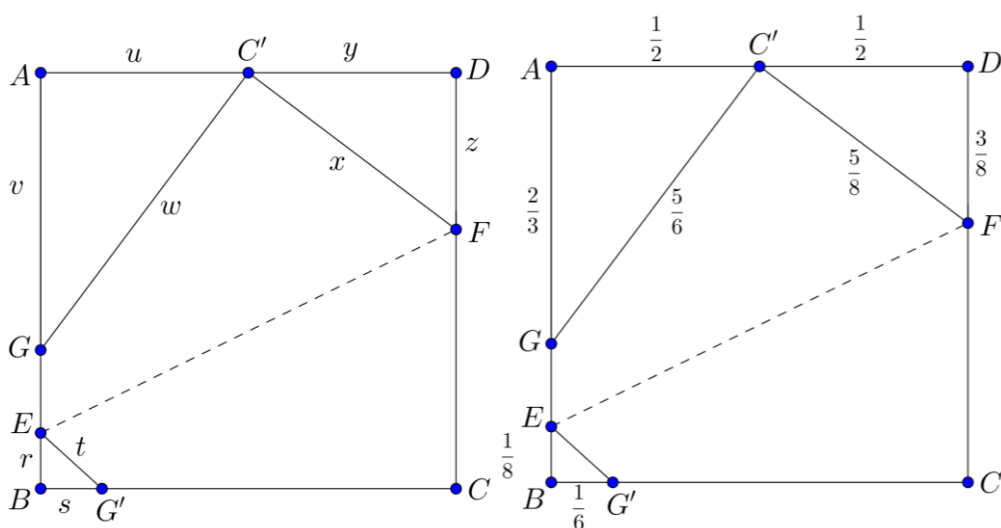


Abbildung 43: Dreiteilung basierend auf den Satz von Haga

- Die Strecke  $GC' = w$  hat eine Länge von  $\frac{5}{6}$ .  
Im selbigen Dreieck mit der selbigen Überlegung ist  $\frac{1/2}{w} = \frac{3}{5}$ , folglich  $w = \frac{5}{6}$ .
- Die Strecke  $BG' = s$  hat eine Länge von  $\frac{1}{6}$ .  
Im Dreieck  $\triangle BG'E$  ist  $|G'C| = |GC'| = w = \frac{5}{6}$ . Daraus ergibt sich, dass  $|BG'| = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ .
- Die Strecke  $EB = r$  hat eine Länge von  $\frac{1}{8}$ .  
Weil  $t : s : r = 5 : 4 : 3$  ist, gilt  $\frac{1/6}{r} = \frac{4}{3}$  und es ergibt sich  $r = \frac{1}{8}$ .

### 7.8.2 Verallgemeinerung des Satz von Haga

Bis jetzt haben wir uns nur angeschaut, welches Ergebnis der Satz von Haga bei der Faltung der Quadratecke  $C$  auf den Mittelpunkt der Quadratseite  $AD$  liefert. Man nennt diese Faltung auch *erste Faltung des Satzes von Haga*. Wie anfangs angedeutet, lässt sich die Methode verallgemeinern und damit alle rationalen Zahlen konstruieren.

Dafür lassen wir die Anfangsbedingung, wonach  $C'$  der Mittelpunkt der Strecke  $AD$  sein muss, fallen und falten  $C$  auf einen beliebigen Punkt auf eben jener Strecke.

Bei dieser Faltung entstehen wieder drei Dreiecke (vgl. Abbildung 44), die – mit denselben Überlegungen - ähnlich zueinander sind.

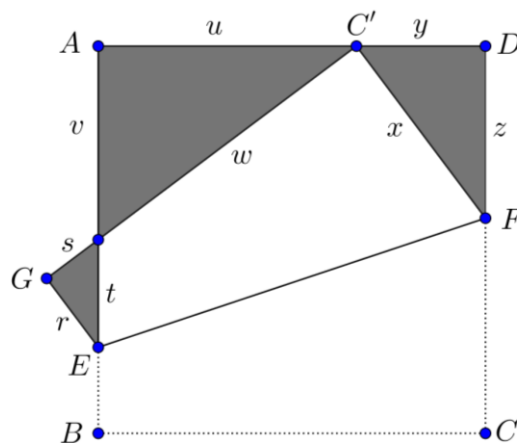


Abbildung 44: Allgemeine Konstruktion von Haga (nach [28])

Wir berechnen die entstandenen Dreiecksseiten.

Im Dreieck  $\Delta C'FD$  gilt wieder der Satz des Pythagoras  $x^2 = y^2 + z^2$ .

Da  $x = 1 - z$  erhalten wir

$$(1 - z)^2 = y^2 + z^2$$

und somit

$$z = \frac{1 - y^2}{2}.$$

Setzen wir dieses Ergebnis in  $x^2 = y^2 + z^2$  ein, so ergibt sich

$$x = \frac{1 + y^2}{2}.$$

Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt für die Seiten im Dreieck  $\Delta AGC'$  :

$v : u = y : z$ , woraus mit  $u = 1 - y$  und  $z = \frac{1 - y^2}{2}$  nun  $\frac{v}{1 - y} = \frac{2y}{1 - y^2}$  folgt, also

$$v = \frac{2y}{1 + y}.$$

Im selben Dreieck berechnen wir noch  $w$  mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$w^2 = u^2 + v^2 = (1 - y)^2 + \left(\frac{2y}{1 + y}\right)^2 = \frac{(1 + y^2)^2}{(1 + y)^2},$$

und somit

$$w = \frac{1 + y^2}{1 + y}.$$

Auf die gleiche Weise lassen sich im letzten Dreieck  $\Delta BG'E$  noch die fehlenden Seiten berechnen. Da  $s = 1 - w$ , folgt  $r = \frac{(1 - y)^2}{2}$  und  $t = \frac{(1 - y)(1 + y^2)}{2(1 + y)}$ .

Mit diesen Berechnungen können wir nun alle rationalen Zahlen konstruieren. Wählen wir nämlich  $y = \frac{1}{2}$ , so ist  $v = \frac{2}{3}$ , wodurch wir  $\frac{1}{3}$  erhalten. Sukzessive lassen sich so weitere beliebige Brüche konstruieren. Die untere Tabelle ist eine Hilfestellung.

$C'D$	$v$	$w$	$z$	$x$
$y$	$v = \frac{2y}{1+y}$	$w = \frac{1+y^2}{1+y}$	$z = \frac{1-y^2}{2}$	$x = \frac{1+y^2}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{17}{32}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{13}{25}$

Tabelle 2: Irreduzible Brüche und die Konstruktion weiterer Brüche

## 8 Resümee und Ausblick

In dieser Arbeit wurde Origami als axiomatische Geometrie untersucht und der euklidischen Geometrie gegenübergestellt. Dabei wurde das Axiomensystem von Huzita-Hatori herangezogen. Im Zuge der Analyse hat sich herausgestellt, dass die sechste Grundfaltung das Papierfalten zu einem mächtigeren Werkzeug macht, als es zunächst den Anschein hat und die klassischen euklidischen Werkzeuge sogar in den Schatten stellt. Diese entspricht nämlich dem Auffinden der gemeinsamen Tangente von zwei Parabeln und ist damit ein kubisches Problem. Deshalb können mit Origami euklidisch unmögliche Probleme gelöst werden. Darunter fallen etwa zwei der *Drei klassischen Probleme der Antike*.

Diese Arbeit beschränkte sich auf geradlinige Faltungen und Einfachfaltungen. In den letzten Jahren wurde diese Restriktion vermehrt aufgehoben und mögliche Abänderungen der „Spielregeln“ und die damit einhergehende Neuformulierung der Axiome in Betracht gezogen. Es gibt Vorschläge, neben der Papierfaltung auch den Zirkel zu verwenden (s. [13]). Diese Erweiterung führt zwar zu keinem mächtigeren System, doch können so gewisse Konstruktionsprobleme auf eine einfachere und elegantere Art gelöst werden.

Im Gegensatz dazu, verändert sich die Mächtigkeit des Systems sehr wohl, wenn man gekurvte Faltungen zulässt. Diese Faltungen sind zwar schwierig zu realisieren, ermöglichen aber die Konstruktion transzendenter Zahlen [20].

Nicht weniger schwierig erweist sich das gleichzeitige Erzeugen mehrerer Faltkanten (Mehrfachfaltungen). Robert Lang beweist, dass die Winkelfünftelung mit den sieben Huzita-Hatori-Axiomen unmöglich ist, allerdings bereits mit Zweifachfaltungen gelingt<sup>18</sup>. Zusammen mit Alperin [5] berechnet er mit Hilfe des Computers die Zahl der dafür erforderlichen Axiome auf 489. Diese zwei Forscher zeigen auch, dass sich jede Polynomgleichung vom Grad  $n$  mit reellen Lösungen durch  $n - 2$  Faltungen lösen lässt und damit theoretisch alle algebraischen Zahlen konstruierbar sind, was bis vor kurzem noch unverhofft war.

Diese verschiedenen Abänderungen der Grundfaltungen zeigen, wie vielfältig die Papierfaltung als geometrisches Werkzeug ist. Ob man sich innerhalb der mathematischen Disziplin - wie auch für die euklidischen Konstruktionen - auf ein Axiomensystem einigen wird, ist anzuzweifeln. Da manche Faltungen so schwer zu realisieren sind, dass die meisten sie sofort ausschließen würden, bestimmt vielleicht der Papierfalter bzw. die Papierfalterin mit seinen/ihren Fähigkeiten die Grenzen der Mächtigkeit der geometrischen Origami-konstruktionen.

---

<sup>18</sup> Für eine Falanleitung siehe [27].

## Literaturverzeichnis

- [1] Hisashi Abe, "Possibility of trisection of arbitrary angle by paper folding," *SUGAKU Seminar*, Kyoto, 1980.
- [2] Roger C. Alperin, "A mathematical theory of origami constructions and numbers," *New York Journal of Mathematics*, 6, 2000, S. 119-133.
- [3] Roger C. Alperin, "A Grand Tour of Pedals of Conics," *Forum Geometricorum*, 4, 2004, S. 143-151.
- [4] Roger C. Alperin, "Trisections and Totally Real Origami," *American Mathematical Monthly*, 112, 3, März 2005, S. 200-211.
- [5] Roger C. Alperin und Rober J. Lang, "One-, two-, and multi-fold origami axioms," <http://www.math.sjsu.edu/~alperin/AlperinLang.pdf>, Dezember 2006 [Zugriff am 18 November 2016].
- [6] David Auckly und John Cleveland, "Totally Real Origami and Impossible Paper Folding," *American Mathematical Monthly*, 102, 3, 1995, S. 215-226.
- [7] Margharita P. Beloch, "Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici," *Periodico di matematiche*, 16, 1936, S. 104 -108.
- [8] Lucas Dahinden, "Axiome - das Fundament der Mathematik," Maturitätsarbeit, Kantonschule Züricher Oberland, 2008.
- [9] Erik D. Demaine und Joseph O'Rourke, *Geometric Folding Algorithms*, Cambridge University Press, New York, 2007.
- [10] Clemens Fuchs, „Angle trisection with Origami and related topics,“ *Elemente der Mathematik*, 66, 2011, S. 121-131, 2011.
- [11] Robert Geretschläger, *Geometric Origami*, Arbelos, United Kingdom, 2008.
- [12] Robert Geretschläger, "Faltdiagramme zum regelmäßigen Fünfeck und zum regelmäßigen Siebeneck", *Didaktisches Kolloquium an der Friedrich-Schiller-Universität*, Jena, 2010.
- [13] Fadoua Ghourabi, Tetsuo Ida und Asem Kasem, "Origami Axioms and Circle Extension," *Proceedings of the 2011 ACM Symposium on Applied Computing*, Tai-Chung, China, 2011.
- [14] Fadoua Ghourabi, Asem Kasem und Cezary Kaliszyk, "Algebraic Analysis of Huzita's Origami Operations and their Extensions," *Automated Deduction in Geometry*, Springer, 2013.
- [15] Koshiro Hatori, "K's Origami," <http://origami.ousaan.com/library/conste.html>, 2002 [Zugriff am 18 November 2016].
- [16] Hans-Wolfgang Henn, "Origamics: Papierfalten mit mathematischem Spürsinn,“ *Die neue Schulpraxis*, Heft 6/7, 2003.
- [17] Hans-Wolfgang Henn, *Geometrie und Algebra im Wechselspiel: Mathematische Theorie für schulische Fragestellungen*, Springer Spektrum, 2012.

- [18] Thomas C. Hull, "A Note on 'Impossible' Paper Folding," *American Mathematical Monthly*, 103, 1996, S. 242-243.
- [19] Thomas C. Hull, "Origamiquiz," *The Mathematical Intelligencer*, 26, 4, 2004, S. 38-39, 61-63.
- [20] Thomas C. Hull, "Constructing  $\pi$  via origami," <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.136.2586&rep=rep1&type=pdf>, 5 Mai 2007 [Zugriff am 1 März 2017].
- [21] Thomas C. Hull, "Solving Cubics with Creases," *The Mathematical Association of America*, 118, April 2011, S. 307-315.
- [22] Thomas C. Hull, *Project Origami: activities for exploring mathematics*, zweite Ausgabe, CRC Press, Wellesley, 2013.
- [23] Thomas C. Hull, "Tom Hull's Home Page," <http://mars.wne.edu/~thull/>, 14 März 2015 [Zugriff am 1 Oktober 2016].
- [24] Norbert Hungerbühler, "Origami : von der Kunst und der Wissenschaft des Papierfaltens," *Didaktikhefte der ÖMG*, 2013.
- [25] Jacques Justin, "Resolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques," *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Humiaki Huzita (Hrsg.), S. 251-251, 1989.
- [26] Michel Lafond, "Mieux que la règle et le compas : l'origami," *Bulletin de l'APMEP*, 502, S. 67-78, 2013.
- [27] Robert J. Lang, "Angle quintisection," [www.langorigami.com/article/angle-quintisection](http://www.langorigami.com/article/angle-quintisection), 2004-2016 [Zugriff am 18 November 2016].
- [28] Robert J. Lang, "Origami and Geometric Constructions," <http://www.langorigami.com>, 2010.
- [29] George E. Martin, *Geometric constructions*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [30] T. Sundara Row, *Geometric Exercises in Paper Folding*, dritte Ausgabe, Open Court Publishing Company, 1917.
- [31] Michael Schmitz, "Der Ableger: Eine Ergänzung zum Satz von Haga (I)," *Die Wurzel*, 6, 2016, S. 124-127, 2016.
- [32] Michael Schmitz, "Mathegami = Mathematik + Origami," <http://www.mathegami.de>, 2015 [Zugriff am 21 Februar 2017].
- [33] B. Scimemi, "Algebra e geometria piegando la carta," *Matematica: gioco ed apprendimento*, 1990, S. 1-11.
- [34] John S. Smith, *Notes on the History of Origami*, Preface to the second edition, April 1996.
- [35] Julia Waschbusch und Thomas Gawlick, "Grundfaltungen des Origami," *Der Mathematikunterricht*, 6, Juni 2009, S.49-62.

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Euklidisches Axiom 1 und 2 .....	12
Abbildung 2: Euklidisches Axiom 3, 4 und 5 .....	13
Abbildung 3: Huzita-Hatori-Axiom 1 und 2 .....	17
Abbildung 4: Huzita-Hatori-Axiom 3 .....	17
Abbildung 5: Huzita-Hatori-Axiom 4 und 5 .....	18
Abbildung 6: Interpretation von Axiom 5 (nach [18, 22]).....	18
Abbildung 7: Beweis des Resultats von Axiom 5 (nach [11]) .....	19
Abbildung 8: Anzahl der Tangenten in Axiom 5 .....	20
Abbildung 9: Huzita-Hatori-Axiom 6 .....	20
Abbildung 10: Drei Tangenten an zwei Parabeln .....	21
Abbildung 11: Huzita-Hatori-Axiom 7 .....	21
Abbildung 12: Konstellation für zwei Fallgeraden in Axiom 7 .....	22
Abbildung 13: Ausführbarkeit von Axiom 5 .....	24
Abbildung 14: Eine gemeinsame Tangente in Axiom 6 .....	24
Abbildung 15: Zwei gemeinsame Tangenten in Axiom 6.....	25
Abbildung 16: Sonderfälle in Axiom 6 .....	25
Abbildung 17: Unendlich viele Möglichkeiten Axiom 6 auszuführen .....	26
Abbildung 18: Einzig mögliche Konstellation für begrenzte Fallkantenanzahl bei parallelen Geraden in Axiom 7 .....	26
Abbildung 19: Konstruktion einer Geraden mit Origami .....	28
Abbildung 20: Konstruktion der Winkelhalbierenden und der Mittelparallelen mit Origami .....	29
Abbildung 21: Parabel mit der Gleichung $p_0: x^2 = 2cy$ .....	33
Abbildung 22: Parabel $p_1$ und Parabel $p_2$ (nach [11]), In der Zeichnung ist $m = n = 0$ .....	35
Abbildung 23: Konstruktion eines Kreises mit Origami (nach [11]).....	39
Abbildung 24: Konstruktion des Schnittpunktes eines Kreises mit einer Geraden mit Origami (nach [11]) .....	40
Abbildung 25: Konstruktion der Schnittpunkte zweier Kreise mit Origami (nach [11]) .....	40
Abbildung 26: Konstruktion der Tangente an eine Parabel mit Zirkel u. Lineal (nach [11]) .....	43
Abbildung 27: Konstruktion der Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt .....	45
Abbildung 28: Abtragen einer Strecke auf einen Strahl mit Origami.....	45
Abbildung 29: Konstruktion von Brüchen mit Origami .....	46
Abbildung 30: Lösen der Gleichung $x^2 + 4x - 5 = 0$ mit Origami.....	49
Abbildung 31: Konstruktion der Quadratwurzel .....	50
Abbildung 32: Lösen der Gleichung $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ mit Origami.....	52
Abbildung 33: Verdoppelung des Einheitswürfels .....	57
Abbildung 34: Ein Beloch-Quadrat.....	58
Abbildung 35: Erste Konstruktionsschritte des Beloch-Quadrats (nach [21]).....	58
Abbildung 36: Konstruktion des Beloch-Quadrats (nach [21]) .....	59

Abbildung 37: Belochs Origami-Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ (nach [21]) .....	60
Abbildung 38: Messers Origami-Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ .....	61
Abbildung 39: Faltaneitung zu Abes Winkeldreiteilung (nach [28]).....	65
Abbildung 40: Beweis zur Winkeldreiteilung nach Abe (nach [26]).....	66
Abbildung 41: Justins Winkeldreiteilung (nach [11]).....	67
Abbildung 42: Hagas Konstruktion (nach [31]).....	69
Abbildung 43: Dreiteilung basierend auf den Satz von Haga .....	71
Abbildung 44: Allgemeine Konstruktion von Haga (nach [28]) .....	72

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Huzita-Hatori-Axiome mit Voraussetzungen für beschränkte Anzahl an Faltgeraden.....	27
Tabelle 2: Irreduzible Brüche und die Konstruktion weiterer Brüche.....	74

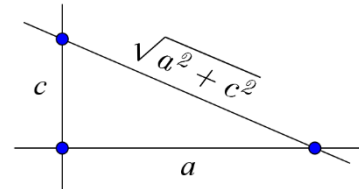
## Anhang

### Konstruktion der Strecke $\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$ mittels Papierfaltung (nach [11])

#### 1. Schritt

Die Längen  $a$  und  $c$  sind bekannt.

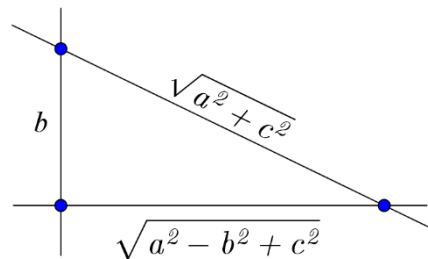
Damit kann ein rechtwinkeliges Dreieck gefaltet werden, dessen Seiten  $a$  und  $c$  ist ((H2), (H3) und (H4)). Die Länge der Hypotenuse beträgt somit  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .



#### 2. Schritt

Die Längen  $b$  und  $\sqrt{a^2 + b^2}$  sind bekannt.

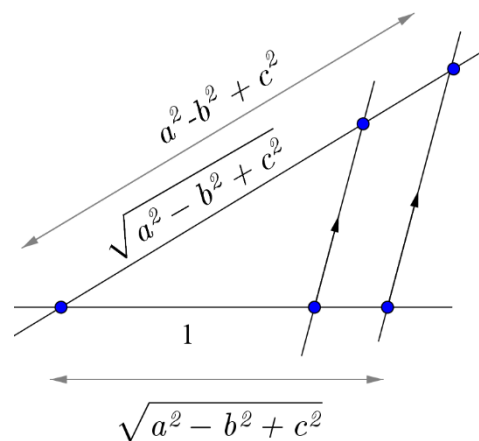
Es lässt sich ein rechtwinkeliges Dreieck konstruieren, dessen Seiten  $b$  und  $\sqrt{a^2 + b^2}$  sind ((H2),(H3),(H4) und (H6)). Für die Länge der zweiten Seite erhält man  $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ .



#### 3. Schritt

Es ist möglich ein Dreieck zu falten, dessen eine Seite die Längeneinheit 1 und dessen andere Seite die Länge  $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$  hat.

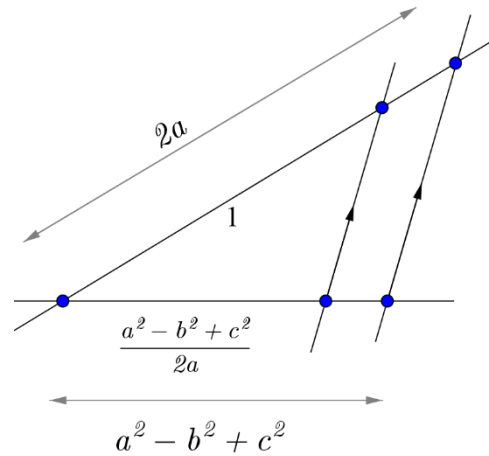
Anschließend kann ein ähnliches Dreieck mit Seite  $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$  gefaltet werden ((H3)), die der Seite mit der Länge 1 des ersten Dreiecks entspricht. Die Seite des zweiten Dreiecks, die der Seite mit Länge  $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$  entspricht, hat dann die Länge  $a^2 - b^2 + c^2$ .



#### 4. Schritt

Es ist möglich ein Dreieck mit der Seitenlängen  $2a$  und  $a^2 - b^2 + c^2$  zu falten ((H3)).

Anschließend kann ein ähnliches Dreieck mit Seite 1 gefaltet werden ((H3), (H2)), die der Seite mit der Länge  $2a$  des ersten Dreiecks entspricht. Die Seite des zweiten Dreiecks, die der Seite mit Länge  $a^2 - b^2 + c^2$  entspricht, hat somit die Länge  $\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$ .



### Jacques Justin's Winkeldreiteilung eines stumpfen Winkels (nach [28])

- 1) Der zu drittelnde Winkel ist der stumpfe Winkel  $\theta = \angle XOZ$ .
- 2) Man verlängere die Geraden  $OZ$  und  $OX$ .
- 3) Man falte  $X$  durch  $O$  auf  $X'$ .
- 4) Man wähle einen Punkte  $A$  auf  $OZ$  und einen Punkte  $B$  auf der Verlängerung von  $OZ$  mit demselben Abstand zu  $O$ .
- 5) Man falte gleichzeitig  $A$  auf die Verlängerung von  $OX$  und  $B$  auf die Normal zu  $OX$  (also auf die zuletzt erzeugte Faltkante). Man entfalte das Papier wieder.
- 6) Man falte eine zur letzten Faltkante normale Gerade durch  $O$  um den Winkel zu dritteln.

